УДК 517

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Мотишена О.М., Козяр Л.В.
Науковий керівник – доц., к.пед.н. Кашканова Г.Г.

При розв'язуванні рівнянь, особливо трансцендентних, часто досліджують функцію, яка входить в це рівняння. Цілком природно, що тут застосовують апарат математичного аналізу, а саме поняття похідної та її властивостей.

Наприклад, розв'яжемо таке тригонометричне рівняння:

$$4 - \sin x + \operatorname{tg} x = 5 \sec x \cos^4 \frac{x}{2}$$

Зробимо заміну. Нехай t= tg $\frac{x}{2}$, тоді отримаємо рівняння:

$$\frac{4t^4 - 4t^3 + 1}{t^4 - 1} = 0$$

Вияснимо, чи може чисельник лівої частини рівняння дорівнювати нулю при умові $t \neq \pm 1$. Для цього дослідимо функцію $f(t) = 4t^4 - 4t^3 + 1$.
$f'(t) = 16t^3 - 12t^2$, звідси $f'(t) \le 0$, якщо $t \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ і $f'(t) > 0$, якщо $t \in [-\infty; 0] \cup \left[\frac{3}{4}; \infty\right]$. Значить, f(t) в точці t= $\frac{3}{4}$ має найменше значення $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{37}{64} > 0$. Значить чисельник не може дорівнювати нулю. Внаслідок цього, дане рівняння не має розв'язку.

Розглянемо наступне рівняння:

$$|6x - 5| = 4 \sin\frac{\pi x}{3}$$

Розв'язок цього рівняння потрібно шукати на проміжку $x \in [\frac{1}{6}; \frac{3}{2}]$, який визначається нерівністю $|6x - 5| \le 4$. Функція $f(x) = |6x - 5|$ зростає при $x \in [\frac{5}{6}; \frac{3}{2}]$, і спадає при $x \in [\frac{1}{6}; \frac{5}{6}]$. В той же час $g(x) = 4\sin\frac{\pi x}{3}$ зростає на проміжку $[\frac{1}{6}; \frac{3}{2}]$. Аналогічно, на проміжку $[\frac{1}{6}; \frac{5}{6}]$ рівняння може мати не більше одного кореня. Можна показати, що $x=\frac{1}{2} \in [\frac{1}{6}; \frac{5}{6}]$ – єдиний розв'язок цього рівняння на проміжку $[\frac{1}{6}; \frac{5}{6}]$. Щоб знайти розв'язок на проміжку $[\frac{5}{6}; \frac{3}{2}]$, досліджуємо поведінку функції $f(x) = 6x - 5 - 4\sin\frac{\pi x}{3}$. Її похідна $f'(x) = 6 - 4\frac{\pi}{3} 4\cos\frac{\pi x}{3}$ задовільняє нерівність $f'(x) \ge 6 - 4\frac{\pi}{3}$ (оскільки $\cos\pi x \le 1$), отже $f(x) < f(\frac{3}{2}) = 0$, коли $x \in [\frac{5}{6}; \frac{3}{2}]$, причому $x=\frac{3}{2}$ – єдиний розв'язок на цьому проміжку. Таким чином , дане рівняння має два кореня: $x=\frac{1}{2}$ та $x=\frac{3}{2}$.