УДК 004.627+517.962.27

ЗАПОВНЕНІСТЬ ДОВІЛЬНОГО ІНТЕРВАЛУ ЧЛЕНАМИ ЗВОРОТНЬОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Михалевич О. В.
Науковий керівник – проф., д.т.н. Лужецький В. А.

Сформулюємо наступну властивість: Будь-яка рекурентна послідовність чисел, що визначається співвідношенням

$$u_1, u_2, ..., u_n = u_{n-2} + u_{n-1},... \quad n = 2,3,4,.... \tag{1}$$

де u_1, u_2 - невід'ємні цілі числа, при m>2 містить 4 або 5 m-значних чисел.

Доведення**.** За допомогою співвідношення для членів послідовності (1)

$$u_n = u_1 \cdot F_{n-2} + u_2 \cdot F_{n-1}, \quad n \in N, \tag{2}$$

можна довести наступні нерівності

$$u_{n+3} \le 5 \cdot u_n, \qquad u_{n+5} \ge \frac{21}{2} \cdot u_n, \quad n \in N. \tag{3}$$

Позначимо через u_n найменше із m-значних чисел послідовності, отже

$$u_{n-1} < 10^{m-1}, u_n \ge 10^{m-1}, \quad m > 2, \tag{4}$$

і на основі (1), з урахуванням першої нерівності (4)

$$u_n < 2 \cdot 10^{m-1}, \tag{5}$$

звідки, з урахуванням першої нерівності (3), дістанемо

$$u_{n+3} < 10 \cdot 10^{m-1} = 10^m, \quad n \ge 3, \tag{6}$$

згідно якій, з урахуванням другої нерівності (4), випливає, що у напіввідкритий інтервал [10^{m-1}**;** 10^m), який визначає множину m-значних натуральних чисел, попадають всі числа u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, тобто, принаймні чотири числа послідовності (1).

З урахуванням других нерівностей у (3) та (4) дістанемо

$$u_{n+5} \ge 10,5 \cdot 10^{m-1} > 10^m, \quad n \ge 3, \tag{7}$$

звідки і випливає, що шосте число u_{n+5} підмножини послідовності (1), яка починається з числа u_n, виходить за межі інтервалу, що визначає множину m-значних натуральних чисел. Це і означає, що m-значних чисел послідовності (1) не може бути більше п'яти. Зауважимо, що згідно приведеному варіанту доведення випливає, що кількість m-значних чисел послідовності (1) не менше чотирьох та не більше п'яти, але звідси не випливає, що в залежності від m в указаній послідовності обов'язково зустрічається, як 4 так і 5 m-значних чисел.