

ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ТА ПРИКЛАДИ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Бондар О. Ю., Павлюк О. І.
Науковий керівник – доц., к.т.н. Краєвський В. О.

Необхідною умовою існування екстремуму функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (1)$$

із закріпленими граничними точками допустимих кривих є рівняння

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad (2)$$

чи в розгорнутому вигляді

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0. \quad (3)$$

Це рівняння називається рівнянням Ейлера. Інтегральні криві рівняння Ейлера $y = y(x, C_1, C_2)$ називаються екстремальми. Тільки на екстремальх може досягатися екстремум функціонала (1).

Приклад 1. На яких кривих може досягати екстремум функціонал

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y')^2 - y^2] dx; y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1?$$

Рівняння Ейлера має вигляд $y'' + y = 0$; його загальним розв'язком є $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Використовуючи граничні умови, одержуємо: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$; отже, екстремум може досягатися лише на кривій $y = \sin x$.

Приклад 2. На яких кривих може досягати екстремуму функціонал

$$v[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx; y(0) = 0, y(1) = 1?$$

Рівняння Ейлера має вигляд $y'' - 6x = 0$, звідки $y = x^3 + C_1 x + C_2$. Використовуючи граничні умови, одержуємо: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$; отже, екстремум може досягатися лише на кривій $y = x^3$.

Приклад 3. Визначити криву найменшої довжини, що з'єднує точки (x_0, y_0) і (x_1, y_1) , тобто знайти мінімум функціонала

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx; y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1.$$

Рівняння Ейлера має вигляд $\frac{y''}{\sqrt{(1 - (y')^2)^3}} = 0$, звідки $y = C_1 x + C_2$.