

ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛА

Павлюк О. І., Бондар О. Ю.

Науковий керівник – доц., к.т.н. Краєвський В. О.

Функціоналами називаються змінні величини, значення яких визначаються вибором однієї або декількох функцій. Варіаційне числення вивчає методи, що дозволяють знаходити максимальні й мінімальні значення функціоналів. Задачі, у яких потрібно досліджувати функціонал на максимум або мінімум, називаються варіаційними задачами.

Багато законів механіки й фізики зводяться до твердження, що деякий функціонал у розглянутому процесі повинен досягати мінімуму або максимуму. У такому формулюванні ці закони називаються варіаційними принципами механіки або фізики. До числа таких варіаційних принципів або найпростіших наслідків з них належать: принцип найменшої дії, закон збереження енергії, закон збереження імпульсу, закон збереження кількості руху, закон збереження

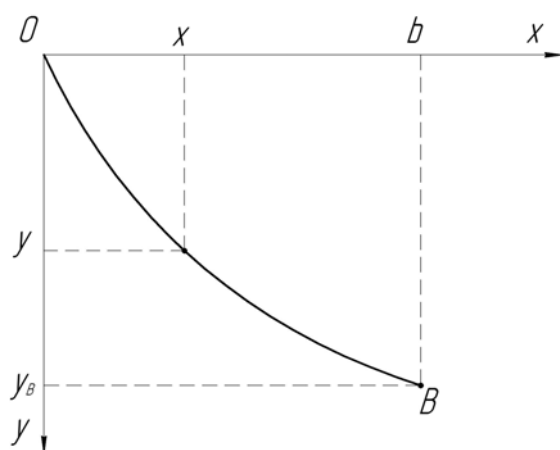


Рис. 1

моменту кількості руху, різні варіаційні принципи класичної й релятивістської теорії поля, принцип Ферма в оптиці та ін. Розглянемо приклади конкретних задач, що приводять до поняття функціонала.

Приклад 1 (задача про брахістохрону). У вертикальній площині через дві дані точки O та B , що не лежать на одній вертикалі, провести криву (тобто знайти її рівняння), рухаючись по якій, матеріальна точка під дією сили тяжіння переміститься з верхньої точки в нижню за

найкоротший час (рис. 1). За умови, що початкова швидкість падаючої точки дорівнює нулю, а сили тертя відсутні, отримаємо таку задачу

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y}} dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = y_B.$$

Приклад 2 (задача про мінімальну поверхню обертання). В площині xOy з'єднати точки $A(a, y_A)$ і $B(b, y_B)$ кривою так, щоб бічна поверхня тіла, отриманого від обертання цієї кривої навколо осі Ox , мала найменшу площу

$$S[y(x)] = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \rightarrow \min, \quad y(a) = y_A, \quad y(b) = y_B.$$

Оригінальність сформульованих задач – у тому, що невідомими в них є функції, які повинні зробити значення інтеграла найменшим або найбільшим.