

ВИЗНАЧЕННЯ ВСІХ ПІДГРУП СИМЕТРИЧНОЇ ГРУПИ

Михалевич О.В.

Науковий керівник – доц., канд. фіз.-мат. наук Дереч В.Д.

З метою перевірки ефективності застосування системи символічних обчислень Maple для виконання досліджень в області теорії груп було поставлено наступну задачу: знайти всі підгрупи симетричної групи даного степеня та побудувати решітку підгруп.

Як відомо, множина всіх підстановок множини $X = \{1; 2; \dots; n\}$ з визначеною бінарною операцією множення утворюють симетричну групу S_n степеня n . Кількість елементів групи $n!$ називається її порядком. Якщо підмножина H_m групи S_n ($1 \leq m \leq n$) відносно введеної групової операції сама утворює групу, то група H_m називається підгрупою групи S_n . Одиничний елемент та сама група є тривіальними підгрупами.

Для симетричної групи S_3 знаходження всіх підгруп є простою задачею. Симетрична група S_4 має уже 24 елементи. Теорема Лагранжа дає необхідну умову існування підгрупи: порядок підгрупи є дільником порядку групи. Отже, для S_4 , підгрупи потрібно шукати серед множин з кількістю елементів $m = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Всього кількість m -елементних підмножин дорівнює $C_{23}^{m-1} = 23! / ((m-1)!(23-m+1)!)$ (одиничний елемент є обов'язковим у всіх підгрупах). Для кожної із підмножин потрібно зробити $A_{m-1}^2 + m - 1 = (m-1)!$ операцій множення і для кожного результату перевірити належність отриманого елемента даній множині з m елементів. Шести-елементних підмножин всього 33649 і для кожної потрібно зробити максимум 25 операцій множення та перевірок, а 8-елементних підмножин уже більше 245 тисяч і операцій по перевірці кожної множини - 49 (!). При знаходженні підгруп 8 порядку комп'ютер зависав. Довелося відмовитися від стандартної команди Maple, яка генерує всі підмножини у вигляді списку і створити власну процедуру генерування сполучень із n елементів по m : підмножина генерується, перевіряється і не запам'ятовується при негативній відповіді. В результаті для S_4 знайдено всі підгрупи та за спеціально створеною програмою визначені всі випадки повного входження підгруп, їх перетину та відсутності спільних елементів. По цим результатам побудовано решітку підгруп. Виявилось, що для знаходження всіх підгруп для S_5 знадобиться 10^{22} років! Це несподіваний результат. **Висновок.** Система Maple є зручним інструментом для початкового аналізу конкретної проблеми та накреслення шляхів її розв'язання.