УДК 621.77(07)

ВДАВЛЮВАННЯ КУЛЬКИ В ІДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧНЕ СЕРЕДОВИЩЕ З ПЛОСКОЮ ГРАНИЦЕЮ

Понуровська Т.П.
Науковий керівник – проф., д.т.н. Сивак І.О.

В роботі розглянута задача вдавлювання кульки в ідеально пластичне середовище з плоскою границею. Початок циліндричної системи координат r, φ, z поміщали в площину, що містить вільну межу середовища, а вісь z направили по осі симетрії всередину середовища. Переміщення частинок середовища при незначному збільшенні сили тиску штампу вважали малими і позначали через u_r, u_φ і u_z. У даній задачі переміщення u_φ дорівнює нулю.

Для точок середовища, розташованих поблизу осі z, величини переміщень u_r і u_z представимо у вигляді рівнянь

$$u_r = a_0 + a_1 r + a_2 + ..., \ u_z = b_0 + b_1 r + b_2 + ...,$$

де a_0, a_1,a_2,…і b_0, b_1, b_2 . . .— функції координати z. На осі z переміщення u_r дорівнює нулю, таким чином, $a_0 = 0$.

Тоді компоненти тензора деформації поблизу осі z

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = a_1 + 2a_2 r + ..., \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} = a_1 + a_2 r + ...$$

Позначимо через α кут між першим головним напрямом і віссю z, тоді, як неважко побачити, будуть справедливі співвідношення:

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\cos 2\alpha\,, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\cos 2\alpha\,,$$

$$\tau_{rz} = -\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\sin 2\alpha$$

Позначимо через θ кут між напрямом r і бісектрисою прямого кута, утвореного першим і третім головними напруженями $\theta = \pi / 4 - \alpha$.

Нами прийнято, що $(\sigma_3 - \sigma_1)/2 = K$ тоді отримаємо:

$$\sigma_r = \sigma + K \cdot \sin 2\theta, \quad \sigma_z = \sigma - K \cdot \sin 2\theta, \quad \tau_{rz} = -K \cdot \cos 2\theta,$$

де $\sigma = (\sigma_r + \sigma_z)/2$.

Підставляючи вирази для напружень σ_z, σ_r, σ_{rz} , σ_φ в рівняння рівноваги середовища

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0,$$

Отримаємо два диференціальні рівняння:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2K\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} + 2K\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{r}(K - K\sin 2\theta) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2K\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} - 2K\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{r}K\cos 2\theta = 0$$

для двох невідомих функцій σ і θ змінних r і z.

Ці рівняння відносяться до класу гіперболічних рівнянь математичної фізики. Характеристики їх ортогональні між собою і дотичні до них утворюють з радіусом r кути θ і π/2 + θ в кожній точці середовища, крім особливих точок. Тому кінцевий розв’язок задачі можна отримати методом ліній ковзання.