

МЕТОД АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ПРИОРИТЕТНЫХ ФУНКЦИЙ ПРОИЗВОДСТВА ВЫПУСКАЕМОЙ ПРОДУКЦИИ

Алексей Балтовский

Херсонский национальный технический университет, ул. Бериславское шоссе, 24, Херсон, 73008, Украина, тел.: (0552) 55-17-31 E-Mail: aleks_bal@rambler.ru

Аннотация

Предложено решение задачи оптимального планирования производства продукции при ограниченных ресурсах при помощи введения системы функций приоритета в использовании ресурсов. Рассмотрено четыре вида функций приоритета. Приведен алгоритм решения сформулированной задачи для кусочно-линейных функций приоритета.

Вступление

Основной задачей планирования производства выпускаемой промышленным производством (ПП) является расчет оптимального плана выпуска продукции с учетом основных факторов, влияющих на его объем. В зависимости от условий и характера производства к таким факторам можно отнести общественные потребности в данном продукте, наличие сырьевых и энергетических ресурсов, производственные возможности, обеспеченность трудовыми, финансовыми и другими ресурсами. Одним из путей повышения эффективности планирования является использование более точных и достоверных математических моделей оптимизации.

Анализ последних исследований

Анализ последних достижений в области планирования производства продукции при ограниченных ресурсах [1-3] показывает, что обычным приемом, используемым при решении задач планирования являются построение линейной модели со скалярным критерием оптимальности (максимум прибыли и т.п.) и формирование оптимального плана методами линейного программирования. Однако качество плана не всегда можно оценить скалярным критерием. Во многих случаях наиболее предпочтительны векторные критерии, однако трудности решения многокритериальной задачи препятствуют их применению.

Постановка задачи

Разработать метод решения задач максимизации объема продукции при ограниченных ресурсах промышленного производства.

Основная часть

Решим задачу максимизации объема продукции в натуральном выражении при ограничениях:

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \right) \quad (1)$$

$$d_j \leq x_j \leq D_j, \left(j = \overline{1, n} \right) \quad (2)$$

где a_{ij} - потребность в ресурсах i -го вида для производства единицы продукции j -го вида; x_j - объем производства продукции j -го вида; b_i - объем i -го вида ресурсов; d_j, D_j - минимальный и максимальный объемы производства j -го вида продукции, соответственно. n, m — число видов продукции и ресурсов. В процессе планирования, как правило, стремятся увеличить объем продукции от минимального значения d_j до максимального D_j , причем d_j рассматривается как наихудшее из допустимых значений переменной x_j , а D_j - как наилучшее. Однако возможен и противоположный подход, когда наихудшим из возможных значений x_j может быть верхняя граница D_j , а наилучшим - d_j , т. е. при планировании стремятся уменьшить объем производства x_j от D_j до d_j . Обозначим через M_1 и M_2 множества индексов j соответствующих видов продукции x_j и заменим переменные, т.е.

$$y_j = (x_j - d_j) / (D_j - d_j), j \in M_1, \text{ или } y_j = (D_j - x_j) / (D_j - d_j), j \in M_2, \quad (3)$$

В новых переменных задачу максимизации объема продукции можно записать так:

$$y = \left\{ y_j, j = \overline{1, n} \right\} \rightarrow \max \text{ при ограничениях: } \sum_j a'_{ij} y_j \leq b'_i \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \right) \quad 0 \leq y_j \leq 1, j = \overline{1, n},$$

где

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}(D_j - d_j), & j \in M_1 \\ -a_{ij}(D_j - d_j), & j \in M_2 \end{cases} \quad (4)$$

$$b'_i = b_i - \sum_{j \in M_1} a_{ij} d_j - \sum_{j \in M_2} a_{ij} D_j, i = \overline{1, m} \quad (5)$$

Примем, что y_j - неубывающая функция переменной t , определенной на отрезке $0 \leq t \leq 1$ таким образом, что $y_j(0) = 0, y_j(1) = 1, j = \overline{1, n}$. Тогда для количественной оценки плана может быть взята переменная t . Таким образом, получено математическое выражение для целевой функции, соответствующей критерию оптимальности исходной задачи. Однако при этом возникла проблема определения системы функций $\left\{ y_j(t), j = \overline{1, n} \right\}$. Рассмотрим, какой смысл можно придать этим функциям. Предположим, что некоторые виды ресурсов дефицитны. Тогда система функций такова, что вместе с ростом переменной t некоторые из этих функций растут быстрее остальных. Это определит более быстрый по сравнению с остальными рост (улучшение) объема производства продукции X_j . Потребность в ресурсах на производство этой группы продукции будет учитываться в первую очередь. Следовательно, выбор конкретной функции $y_j(t)$ определяет систему приоритетов в использовании ресурсов. Введем количественную оценку системы приоритетов $\{p_j\}$, где p - некоторое число. Систему функций $\{y_j(t)\}$ заменим

функцией приоритета $F(t, p)$, которая определяется тождеством $F(t, p) \equiv y_j(t), j = \overline{1, n}$. В связи с введением системы приоритетов уточненная исходная задача может быть сформулирована в следующей постановке: максимизировать объем производства продукции при ограниченных ресурсах и заданных интервалах изменения объема производства каждого вида продукции, при этом ресурсы должны распределяться между различными видами продукции в соответствии с установленной системой приоритетов. При каждом фиксированном наборе p_j исходная задача преобразуется в следующую задачу математического программирования: максимизировать параметр t при ограничениях:

$$\sum_j a'_{ij} F(t, p_j) \leq b'_i, \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \right), \quad (6)$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad (7)$$

где $F(t, p_j)$ – неубывающая относительно переменной t функция, причем $F(t, p_j) = 0; F(1, p_j) = 1$.

Для практического применения пригодны такие функции приоритета, которые обеспечивают простую зависимость результатов решения задачи от системы приоритетов. Рассмотрим четыре функции приоритета:

1. Все виды продукции имеют одинаковый приоритет $p_j = p$. Тогда $F_1(t, p) = F(t)$. Функцию $F_1(t, p)$ можно представить простейшим математическим выражением $F_1(t) \equiv t$, которое легко интерпретируется: значение t определяет долю интервала $(D_j - d_j)$ в пределах которого производство продукции обеспечено ресурсами.

2. Все виды продукции имеют различный приоритет, причем $p_j = j$ и высший приоритет соответствует

$p_1 = 1$. Функцию приоритета определим так ($p = \overline{1, n}$):

Эта функция позволяет при планировании сначала обеспечить наилучший объем производства для продукта с приоритетом $p = 1$, затем первоначальный объем каждого вида ресурсов уменьшить на величину ресурсов, использованных на производство продукта с приоритетом $p = 1$. После этого переходят к планированию производства продукта с приоритетом $p = 2$ и т. д.

$$F_2(t, p) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq p - 1/n; \\ nt + 1 - p & \text{при } p - 1/n \leq t \leq p/n; \\ 1 & \text{при } t > p/n. \end{cases} \quad (8)$$

3. Пусть функция приоритетов имеет вид $F_3(t, p) = t^p$. Очевидно, что меньшему значению параметра p соответствует больший приоритет. Отношение $F_3(t, p_1)/F_3(t, p) = t^{p_1 - p_2}$ - характеризует отношение приращений (в долях интервала $D_j - d_j$ объемов производства двух видов продукции).

4. Следующую функцию приоритета можно рассматривать как линейный аналог предыдущей:

$$F_4(t, p) = \begin{cases} t/p, & 0 < p \leq 1, 0 \leq t \leq p; \\ 1, & 0 < p \leq 1, p < 1; \\ 0 & 1 \leq p < \infty, 0 \leq t \leq 1 - 1/p; \\ 1 - p(1 - t), & 1 \leq p < \infty, 1 - 1/p \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Эта функция удобнее для вычислений, чем функция t^p . Также как и для $F_3(t, p)$, меньшему значению параметра p соответствует больший приоритет. Отношение $F_4(t, p_1)/F_4(t, p_2) = p_2 / p_1$, для $0 < p \leq 1$, т. е. отношение прироста производства двух видов продукции обратно пропорционально отношению их приоритетов. Функция $F(t, p)$ для любого допустимого значения t определяет объем продукции, производство которого обеспечено ресурсами. Производство оставшейся части продукции $1 - F(t, p)$ может оказаться не обеспеченным ресурсами. Для $1 \leq p < \infty$ отношение объемов двух видов продукции, производство которых может оказаться не обеспеченным ресурсами, равно отношению их приоритетов $1 - F_4(t, p_1)/[1 - F_4(t, p_2)] = p_1 / p_2$.

Алгоритм решения задачи

Алгоритм задачи (1), (2) для кусочно-линейных функций приоритета F_1, F_2, F_4 решается в четыре этапа: на первом этапе из системы ограничений исключают равенства; на втором этапе модифицируют исходную задачу; на третьем - эту задачу решают; на четвертом этапе переходят к решению исходной задачи.

Система ограничений (1) содержит как неравенства, так и равенства. Наличие равенств означает, что некоторые переменные являются линейной комбинацией остальных переменных. Низкоприоритетные переменные исключают из системы ограничений (1) и (2), их заменяют соответствующими линейными комбинациями. В результате из системы (1) исключают равенства, а вместо каждого из них добавляют по два неравенства, полученных из соответствующих неравенств системы (2). На втором этапе необходимо перейти с помощью соотношений (4) и (5) от исходной задачи к задаче (6), (7). Однако алгоритм решения модифицированной задачи удобнее сформулировать так:

$$\sum_j a'_{ij} F(t, p_j) \leq b'_j, \quad \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \right); \quad (10)$$

$$F(t, p) \leq 1, \quad j = \overline{1, m}; \quad (11)$$

$$F(t, p) \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (12)$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad (13)$$

где $F(t, p)$ одна из функций приоритета F_1, F_2, F_4 .

При решении модифицированной задачи вначале определяют максимальное значение переменной t , удовлетворяющее системе ограничений (10), (11), (12), (13), затем периодически исключают из систем (10), (11) те неравенства, которые препятствуют увеличению значений переменной t , после чего значение t снова увеличивают. Этот процесс продолжается вплоть до исключения всех неравенств из систем (10) и (11). При этом считают, что входящие в них функции $F(t, p)$ достигли своего оптимального значения F_j^0 .

Первый этап решения модифицированной задачи

Среди функций $F(t, p)$ выделяют те, которые входят в систему только с отрицательными или нулевыми коэффициентами a'_{ij} . С увеличением значений этих функций неравенства (10) не могут быть нарушены, поэтому этим функциям присваивают максимально допустимое значение, равное единице. Если нескольким видам продукции присвоен один и тот же приоритет, то соответствующие им функции $F(t, p)$ тождественны, что позволяет сократить число слагаемых в левых частях неравенств системы (10) и неравенств в системе (11) и (12). Область определения функции приоритета разбивают по переменной t (отрезок $0,1$) на части (интервалы линейности) таким образом, чтобы на каждой из них система неравенств (10) – (12) была линейной. Точки разбиения отрезка – значения переменной t , при которых функция приоритета $F(t, p)$ для некоторого значения j начинает возрастать от нуля или становится равной единице. Затем решается система линейных неравенств с одной переменной t на последовательности смежных интервалов линейности, начиная с интервала, содержащего точку $t = 1$. Первый этап решения модифицированной задачи заканчивается, как только будет найден интервал, содержащий значения переменной t , удовлетворяющие системе (10) – (12), и среди этих значений будет найдено максимальное. Отсутствие такого интервала означает, что для заданной системы приоритетов задача не имеет решения либо исходная задача вообще не имеет решения.

Укажем процедуру, которая позволит получить дополнительную информацию о ресурсах, необходимых для решения задачи. Эта процедура является итерационной. Каждая итерация включает решение задачи (10)-(13) с некоторыми значениями $B_i \left(i = \overline{1, m} \right)$ правых частей неравенств (10) и переход к новым значениям B_i :

$$B_i^{k+1} = B_i^k \pm (1/2^k) \Delta_i^0, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad i = \overline{1, m};$$

$$B_i^0 = b_i' + \Delta_i^0; \quad \Delta_i^0 = \max \left(0, \sum_j a_{ij} - b_i' \right)$$

(знак «плюс», если на k -м шаге решение задачи не получено, и наоборот; значение B_i определяется с точностью $1/2^k \Delta_i^0$). Неравенства, обратившиеся в равенства, указывают на дефицит, соответствующих ресурсов. Дефицит составляет $B_i^k - b_i', \quad i = \overline{1, m}$.

Второй этап решения модифицированной задачи представляет собой циклический процесс, в каждом цикле которого из систем (10) и (11) исключают часть неравенств, а значение переменной t увеличивают. Решение завершается исключением всех неравенств. На этом этапе можно не учитывать ограничения (12) и те неравенства системы (10), у которых $a'_{ij} \leq 0$. Условие начала цикла – обращение одного или сразу нескольких неравенств систем (10) и (11) в точке t' равенства. Очевидно, что без изменения принятой в задаче системы приоритетов значения функций $F(t, p)$, входящих в эти неравенства, увеличить нельзя, т. е. эти функции достигли своего оптимального значения F_j^0 и далее будут оставаться неизменными. Это равносильно сокращению числа функций $F(t, p_j)$ и неравенств в системах (10) и (11). Таким образом, из системы исключаются неравенства, обратившиеся в точке t' в равенства, и создается возможность для роста значений переменной t . Отметим, что при этом из системы будут исключены также и те неравенства, все функции $F(t, p_j)$ которых достигли своего оптимального значения. Этот процесс заканчивается исключением из систем (10) и (11) всех неравенств и определением оптимальных значений для всех функций $F(t, p_j)$.

На четвертом этапе по формуле

$$x_i = \begin{cases} d_j + (D_i - d_j) F_j^0 & j \in M_1; \\ D_j - (D_i - d_j) F_j^0 & j \in M_2; \end{cases}$$

переходят к исходной задаче. Значения исключенных переменных x_j определяют соответствующими

линейными комбинациями переменных x_j . Решение задачи будет оптимальным по Парето, если в указанном процессе не было исключено ни одного неравенства с коэффициентами a'_{ij} разного знака (кроме исключения неравенств с неотрицательными коэффициентами). Последнее легко установить, если исключение неравенств в каждом цикле начинать с неравенств, имеющих только неотрицательные коэффициенты. Очевидно, что решение задачи с неотрицательными коэффициентами a'_{ij} всегда оптимально по Парето.

Выводы

Отличие предлагаемой модели от известных заключается в разработке вместо применяемых в настоящем времени скалярного критерия оптимальности, векторного критерия - объем продукции в натуральном выражении. Практическое значение разработанной модели состоит в том, что она позволяет более эффективно решать задачи планирования производства

Литература:

- [1] Зубовський В.М. Економіка підприємства. – К.: Вид-во „Європейського університету”, 2000, 64 с.
- [2] Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ/Из-во „Наукова думка”, 1984, 600с.
- [3] Красненкер А.С. Условия оптимальности по Парето/Труды Воронежского ун-та, - Воронеж, 1971, -С 73-76.