

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Предлагается двухэтапный подход к поверхностной интерполяции неравномерно расставленных отсчетов скалярного поля. На первом этапе оно размещается во вспомогательной системе координат, где представляется однозначной поверхностью на основе радиальных базисных функций. На втором этапе поверхность переводится в декартово пространство в виде регулярной полигональной сетки.

Одной из задач геометрического моделирования является восстановление формы пространственного объекта по ограниченному набору точек, принадлежащих его поверхности. Эти точки называются опорными и могут задаваться разработчиком, например, по чертежам объекта, являться результатом непосредственных измерений, например, топографической съемки местности, получаться с помощью компьютерного моделирования или подходящих технических средств, например, 3D-сканера. Распределение физической величины по поверхности объекта также может быть представлено в виде рельефа. Высоты этого рельефа по некоторой шкале ставятся в соответствие значениям температуры, концентрации, напряжения и других физических величин. Набор отсчетов физической или геометрической величины, привязанный к пространственной системе координат, образует так называемое скалярное поле. Оно характеризуется некоторыми особенностями: во-первых, расстановка опорных точек в пределах поля может быть весьма неравномерной, во-вторых, если поле изменяется во времени, то такие изменения происходят довольно медленно.

С точки зрения геометрического моделирования визуализация скалярного поля имеет своей целью создание его математической модели, позволяющей получить пространственные координаты любой промежуточной точки поверхности объекта. Двумя непеременимыми условиями геометрического моделирования является прохождение полученной (выходной) поверхности через опорные точки и гладкость. Последнее условие требует, чтобы сама функция, описывающая моделируемую поверхность, и, как минимум, ее первая производная не имели бы разрывов.

Математическое моделирование располагает обширным арсеналом интерполяционных методов, позволяющих восстановить форму объекта по его характерным точкам – узлам интерполяции. Эти методы имеют достоинства и недостатки и должны оцениваться с двух точек зрения: точности интерполяции и изобразительных возможностей.

Полигональная интерполяция при разреженном наборе опорных точек дает стилизованный, нереалистичный вид поверхности, что особенно заметно при приближении объекта. Интерполяция В-сплайнами, в общем случае, не обеспечивает прохождения поверхности через опорные точки. Интерполяция сплайнами Безье требует предварительного нахождения дополнительных опорных точек, что часто

является весьма затруднительным. Использование степенных интерполяционных полиномов высоких степеней (на большом числе узлов интерполяции) приводит к осцилляциям поверхности. Применение кусочно-аналитической интерполяции заставляет решать задачу гладкой стыковки кусков поверхности.

Эффективным инструментом восстановления сложных поверхностей являются радиальные базисные функции (РБФ). Они позволяют выполнить два ранее сформулированных условия (гладкость поверхности и ее прохождение через опорные точки), а также выбирать наиболее подходящий для конкретной задачи визуализации закон изменения рельефа.

При использовании РБФ-модели координата текущей точки поверхности находится как сумма взвешенных координат опорных точек. Вес опорной точки определяется ее функцией влияния, в качестве которой и выступает РБФ. Степень влияния опорной точки на текущую точку зависит от расстояния между ними, а также от вида РБФ, выбранной для опорной точки.

Математической моделью поверхности на основе РБФ является аналитическая функция f , представляемая, как правило, в общей форме записи:

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(r_i), \quad (1)$$

где r_i – декартово расстояние между i -й опорной точкой и текущей точкой;

ϕ – РБФ, аргументом которой является расстояние r_i ;

λ_i – весовой коэффициент i -й опорной точки, который характеризует степень влияния этой точки на текущую точку.

В литературе, например, [1,с.2],[2,с.120],[3,с.70], описано множество разновидностей РБФ. Из них для графического представления функции f чаще других используются следующие кусочно-гладкие РБФ: степенная, thin-plate spline, гауссиан, мультикватратичная. Они различаются законом влияния опорной точки на текущую точку.

Для получения описания поверхности в аналитической форме необходимо в уравнении (1) найти весовые коэффициенты λ_i для каждой известной опорной точки. Для этого нужно составить систему из N уравнений, неизвестными в которых будут эти коэффициенты. Уравнения составляются из условий прохождения выходной поверхности через N характерных точек с заранее известными координатами. Если в качестве таких характерных точек выбрать опорные точки поверхности, то возникнет система уравнений вида:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(r_{ij}) = 0, \quad j = 1..N,$$

где r_{ij} – расстояние между i -й и j -й опорными точками.

Условие прохождения выходной поверхности через опорные точки обращает правую часть каждого уравнения системы в ноль, что позволяет получить только тривиальное решение: $\lambda_i = 0$. Чтобы избежать тривиального решения, для описания

выходной поверхности используют точки, не принадлежащие этой поверхности, а отстоящие от нее на известное расстояние (в них $f \neq 0$). Например, выбирают точки, лежащие на нормалях к поверхности. Обычно восстановление поверхности проводится по неупорядоченному набору точек, тогда процессу построения нормалей должен предшествовать процесс их упорядочивания, например, при помощи триангуляции. После триангуляции нужно найти нормали к пространственным треугольникам и по ним вычислить нормали в опорных точках. Характерные точки на нормалях должны быть выбраны весьма умело, в противном случае выходная поверхность будет искажена [3, с.69]. Изложенное показывает, что нахождение характерных точек на нормалях к еще не существующей поверхности – довольно сложный процесс.

Многих проблем при использовании РБФ можно избежать, если заранее задать характер поверхности. Например, если известно, что пространственный набор («облако») характерных точек представляет в пространстве однозначную поверхность и каждой паре аргументов u, v соответствует только одно значение функции $R(u, v)$, то ее можно описать в явной форме:

$$R(u, v) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(r_i), \quad (2)$$

где $r_i = f(u, v)$ – расстояние между текущей и i -ой опорной точками, измеренное на поверхности uv .

В этом случае область влияния каждой опорной точки представляет собой замкнутую область на поверхности аргументов.

В частности, явная форма математического описания хорошо подходит для визуализации поведения геометрической или физической величины с «привязкой» к земной поверхности. Например, по высотам характерных точек (это геометрические величины) можно построить рельеф местности, а по данным датчиков смоделировать в виде поверхности изменение уровня загрязненности воздуха (это физическая величина) в пределах территории города. В этих случаях земную поверхность ограниченной протяженности удобно представлять в декартовой системе координат, тогда в выражении (2)

$$u \equiv x, \quad v \equiv y \quad \text{и} \quad r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad (3)$$

а $R(u, v)$ представляет собой высоту рельефа z или уровень загрязнения.

Весовые коэффициенты λ_i находятся из системы линейных уравнений, полученных из (2) для случаев совпадения текущей точки с известными опорными точками. В развернутом виде эта система уравнений, выглядит следующим образом (для случая $R=z$):

$$\begin{aligned} \lambda_1 \phi(r_{11}) + \lambda_2 \phi(r_{12}) + \dots + \lambda_N \phi(r_{1N}) &= z_1, \\ \lambda_1 \phi(r_{21}) + \lambda_2 \phi(r_{22}) + \dots + \lambda_N \phi(r_{2N}) &= z_2, \\ &\vdots \\ \lambda_1 \phi(r_{N1}) + \lambda_2 \phi(r_{N2}) + \dots + \lambda_N \phi(r_{NN}) &= z_N. \end{aligned} \quad (4)$$

В матричной форме система (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \phi(r_{11}) & \phi(r_{21}) & \cdots & \phi(r_{N1}) \\ \phi(r_{12}) & \phi(r_{22}) & \cdots & \phi(r_{N2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(r_{1N}) & \phi(r_{2N}) & \cdots & \phi(r_{NN}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а ее решение выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \phi(r_{11}) & \phi(r_{21}) & \cdots & \phi(r_{N1}) \\ \phi(r_{12}) & \phi(r_{22}) & \cdots & \phi(r_{N2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(r_{1N}) & \phi(r_{2N}) & \cdots & \phi(r_{NN}) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (6)$$

Таким образом, последовательность действий по нахождению значений скалярного поля как точек однозначной поверхности будет сводиться к нахождению расстояний между всеми опорными точками по выражению (3) и вычислению по ним значений РБФ. На основе полученных значений решается матричное уравнение (5). После этого необходимо осуществить генерацию полигональной сетки. Выбрав необходимый шаг по осям координат (в зависимости от требуемой детальности построения), можно найти промежуточные точки поверхности по выражению (2). Эти точки становятся вершинами полигональной сетки. Рисунок 1 иллюстрирует формообразующие возможности РБФ при явном описании выходной поверхности.

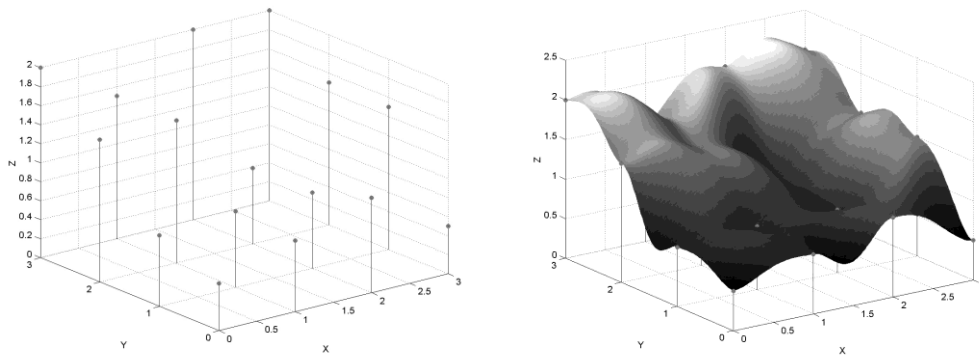


Рисунок 1 – Графическое представление результатов геометрического моделирования однозначной поверхности на основе РБФ с использованием явной формы описания: набор исходных точек и проходящая через них выходная поверхность

Не все объекты визуализации имеют поверхность, которую можно описать однозначной функцией. Например, распределение напряжений на поверхности машиностроительной конструкции (при описании его скалярным полем) визуально будет представляться многозначной поверхностью. Для нее использование явной формы описания невозможно. В этом случае целесообразна параметрическая форма описания. Она предполагает построение объекта в несколько этапов [4,с.37]. На первом этапе производится перевод опорных точек из декартовых координат в некоторую промежуточную вспомогательную координатную систему. Например, для замкнутых

объектов в качестве вспомогательной может быть использована сферическая система координат. Начало промежуточной системы координат должно располагаться в весовом или геометрическом центре облака опорных точек либо должно указываться оператором. При использовании сферической системы координат перевод в нее будет производиться по известным математическим выражениям:

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right),$$

$$\theta = \operatorname{arccos}\left(\frac{z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}\right),$$

где ρ – полярный радиус, φ – азимутальный угол (долгота), θ – полярный угол (широта) опорной точки;

x, y, z – положение точки в декартовой системе координат;

x_0, y_0, z_0 – положение центра сферической системы координат в декартовой системе координат.

Описание выходной поверхности в сферической системе координат представляет собой выражение (2), в котором

$$u \equiv \varphi, \quad v \equiv \theta, \quad R \equiv \rho,$$

а расстояние между текущей и опорными точками берется в угловых единицах:

$$r_i = \operatorname{arccos}(\cos \theta \cdot \cos \theta_i + \sin \theta \cdot \sin \theta_i \cdot \cos(\varphi - \varphi_i)).$$

Нахождение весовых коэффициентов λ_i выполняется по выражению (6), куда вместо z подставляется полярный радиус ρ .

Промежуточные точки поверхности (вершины будущей полигональной сетки) находятся путем изменения аргументов φ, θ с выбранными значениями шагов и вычисления ρ по выражению (2), в котором z_i нужно заменить на ρ_i . Одновременно текущие точки поверхности переводятся в декартову систему координат:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Поскольку изменение аргументов φ, θ происходит по заранее заданному закону, полученные точки оказываются упорядоченными, что облегчает формирование полигональной сетки. Формообразующие возможности РБФ в параметрической форме описания показаны на рисунке 2.

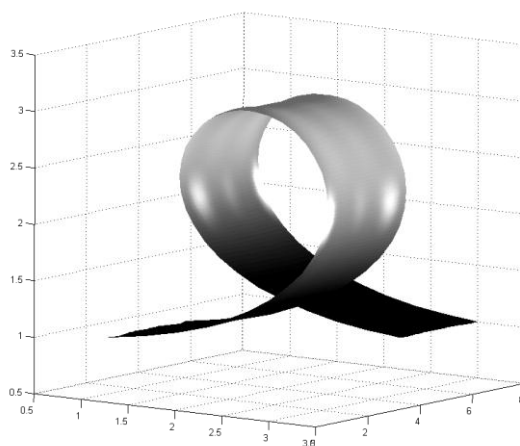


Рисунок 2 – Графическое представление результатов геометрического моделирования многозначной поверхности на основе РБФ с использованием параметрической системы координат

Скалярное поле физической величины может изменяться во времени. Поскольку, как правило, такое изменение идет сравнительно медленно, перечисленные действия по его визуализации могут выполняться в режиме реального времени.

Литература

3. Bors A. G. Introduction of the Radial Basis Function (RBF) / A. G. Bors // Networks – Online Symposium for Electronics Engineers, issue 1, vol. 1, DSP Algorithms: Multimedia, Feb. 13. – 2001. – P. 1–7.
4. Carr J. C. Smooth surface reconstruction from noisy range data / J. C. Carr, R. K. Beatson, B. C. McCallum, W. R. Fright, T. J. McLennan, T. J. Mitchell // ACM GRAPHITE 2003. – Melbourne, Australia. – 11-19 February 2003. – P.119-126.
5. Carr J.C. Reconstruction and Representation of 3D Objects with Radial Basis Functions / J.C. Carr, R.K.Beatson, J.B.Cherrie, T.J.Mitchell, W.R.Fright, B.C.McCallum, T.R.Evans // ACM SIGGRAPH 2001. – 2001. – P.67–76.
6. Косников Ю.Н. Геометрическое моделирование пространственных форм в проектировании интерфейса АСУ специального назначения / Ю.Н.Косников., В.С.Власов // Вопросы радиоэлектроники, серия «Системы отображения информации и управления спецтехникой». – 2012. – Вып. 1. – С. 33–42.