УДК 519.6

Терещенко В.М., Фісуненко А.Л.

ТРИАНГУЛЯЦІЯ ПРЯМОЛІНІЙНОГО ПЛАНАРНОГО ГРАФА ГОСТРИМИ КУТАМИ

У роботі розглядається метод триангуляції довільно взятого прямолінійного планарного графа гострими кутами. Для забезпечення оптимального розбиття використовується діаграма Вороного та алгоритм переміщення точок Штейнера.

We consider the triangulation method of arbitrarily taken straight planar graph with acute angles. To ensure optimal partitioning we use Voronoi diagram and the algorithm of Relocating Steiner points.

1. Вступ

Постановка проблеми. У цій роботі розглядається задача триангуляції довільно взятого прямолінійного планарного графа гострими кутами. Під триангуляцією мається на увазі розбиття графа на непересічні трикутники, таким чином, що перетин будь-яких двох різних трикутників або порожній, або складається з вершини або ребра. Трикутник є найпростішим полігоном, вершини якого однозначно задають площину. Будь-яка область може бути розбита на трикутники. Обчислювальна складність алгоритмів розбиття на трикутники істотно менша, ніж при використанні інших полігонів. Для трикутника легко визначити три його найближчих сусіда, що мають з ним спільні ребра. Саме тому триангуляція має велике теоретичне і практичне значення.Великі кути в триангуляції, як відомо, призводять до небажаних чисельних результатів в багатьох прикладних програмах [1]. Саме тому є актуальною задача розбиття графа на гострокутні трикутники, такі що всі кути менші $\pi/2$. Важливим застосуванням є обчислення геодезичних відстаней, найкоротшого шляху між триангульованими областями, триангуляція поверхонь вищих вимірів.

Аналіз останніх досліджень. На сьогоднішній день існують алгоритми триангуляції простих многокутників на трикутники без тупих кутів [2, 3, 4, 5]. Відомі алгоритми триангуляції гострими кутами, які дають результати, коли вхідними даними є множина точок, або нескладний многокутник, наприклад тупий трикутник, квадрат, чотирикутник або п'ятикутник. Ліндгрен [7] показав, що необхідно щонайменше вісім трикутників для триангуляції полігону з усіма гострими кутами. Пізніше, Кассіді і Лорд показали, що $\forall n \geq 10$, але не для $n = 9$, існує триангуляція гострими кутами полігону, який містить рівно n трикутників. Манхеймер довів, що необхідно і достатньо сім гострокутних трикутників, щоб поділити нетупокутний трикутник. Maehara [8] показав, що довільний чотирикутник можна розбити на 10 (але, можливо,й менше) гострих трикутника. Але на сьогоднішній день важко відзначити більш-менш ефективні алгоритми гострокутної триангуляції графа і практично не існує підходів побудови загальних стратегій розв’язання. В роботі пропонується один із підходів узагальнення задачі гострокутної триангуляції для графів.

Новизна та ідея. В роботі запропоновано новий підхід, який узагальнює задачу гострокутної триангуляції для довільного плоского графа.

Мета статті. Розробити узагальнений алгоритм побудови триангуляції гострими кутами довільного планарного прямолінійного графа.

2. Основна частина

Сформулюємо геометричну постановку задачі тріангуляції гострими кутами.

Постановка задачі тріангуляції. Нехай заданий планарний прямолінійний граф G(V,E): $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ – множина вершин, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$- множина ребер. Необхідно побудувати триангуляцію графа так, щоб усі утворені трикутники мали лише гострі кути.

Означення 1. *Точки Штейнера* – точки, що необхідно додати до множини V для побудови трикутників при триангуляції..

Означення 2. *Зіркова вершина a* – це вершина, інциндентна множині суміжних трикутників. *Посилання вершини a* – це ребра трикутників із спільною зірковою вершиною, які не з'єднані з *a*. Вершина *a* – *вільна*, якщо вона була вставлена алгоритмом як точка Штейнера.

В основі ідеї запропонованого алгоритму лежить модифікація тріангуляції Делоне, запропонованої в [6]. Модифікація тріангуляції Делоне полягає у виконанні спочатку тріангуляції Делоне, а потім ітераційного введення точок Штейнера для видалення трикутників з малими кутами. Традиційно, точки Штейнера – центри трикутників з малими кутами. Алгоритм, по-перше, використовує діаграму Вороного для того, щоб ітераційно знайти локально оптимальні точки Штейнера для вставки. По-друге, він виконує крок переміщення попередньої точки Штейнера, щоб «поганий» трикутник міг би бути виправлено без вставки нових точок Штейнера.

2.1. Використання діаграми Вороного

Нехай Δpqr гострокутний трикутник та (p,q) – найкоротше ребро (рис.1). Позначимо через *slab*(p,q) область, розташовану між двома прямими, одна з яких проходить через p, друга – через q. Обидві прямі ортогональні відрізку (p, q). Нехай *slice*(p, q) – область (зафарбована область рис.1), яка є перетином *slab*(p,q) та внутрішньої частини кола описаного навколо Δpqr. В модифікованому алгоритмі запропоновано вставити точку Штейнера всередину *slice*-області не гострокутного трикутника якнайдалі від його вершин. Зауважимо, що ця точка є вершиною діаграми Вороного або лежить на ребрі діаграми Вороного. Знаходимо її пошуком найближчого сусіда на діаграмі Вороного.

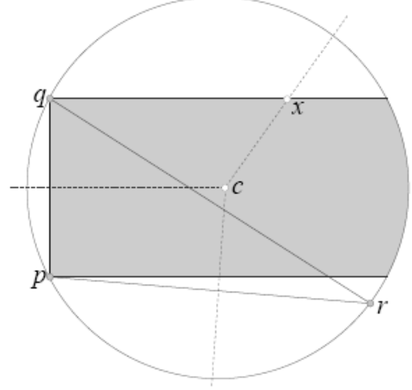

Рис.1. Побудова області *slice*(*p, q*).

2.2. Переміщення точок Штейнера

В роботі пропонується проста стратегія переміщення точок Штейнера для включення її в п.2.1. Можливість переміщення точки Штейнера перевіряється кожного разу перед вставкою нової точки. Вхідні вершини – не вільні та не пересуваються. Для кожного не гострокутного трикутника, спочатку спробуємо перемістити вільні точки (рис. 2). Для вільної точки *a*, таке переміщення можливе лише тоді, коли перетин *slab*-областей посилання точки *a* – не порожній. Виконаємо перетин та здійснюємо простий пошук у ньому. Якщо одна з вільних вершин трикутника знаходиться так, що усі трикутники нової зірки стають гострокутними, мі здійснюємо переміщення. Якщо ні – вставляємо нову точку Штейнера.

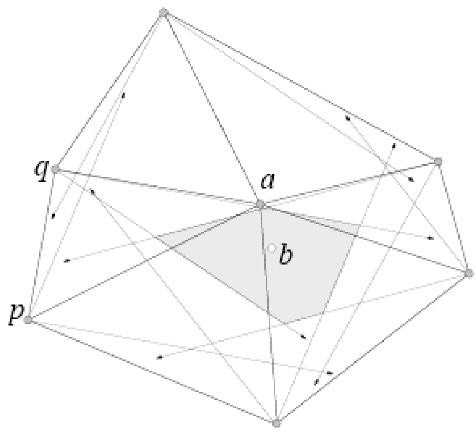

Рис.2. Переміщення вільних точок.

3. Алгоритм

1. Виконати тріангуляцію Делоне (DelTri) над вхідними даними;
2. Нехай *P* – отримана множина точок;
3. WHILE ІСНУЄ негострокутний трикутник pqr IN DelTri(P)

relocated : = false;

For each вільна вершина a трикутника pqr

IF $K = \bigcap_{xy \in link(a)} slab(xy) \neq 0$ and $\exists b \in K$: всі трикутники зірки b in DelTri($P \cup \{b\} - \{a\}$) гострокутні THEN

Видалити a; вставити b; relocated:=true; break;

endfor

if relocated == false then

вставити точку $x \in slice(pq)$, яка знаходиться якнайдалі від з існуючих вершин

ENDWHILE

Обґрунтування складності. Для встановлення оцінки складності запропонованого алгоритму проаналізуємо основні кроки алгоритму:

Попередня обробка $O(n \log n)$.

Перебір точок здійснюється за $O(n)$.

Виконання функції $slab(x, y)$ та $slice(p, q)$ – $O(1)$.

Видалення та вставка точки $O(\log n)$.

Тому загальний час виконання алгоритму:

$O(f(n)) = O(n \log n)$ + час на попередню обробку $O(n \log n) = O(n \log n)$

4. Висновки

У роботі запропоновано узагальнений алгоритм для триангуляції довільного планарного графа гострими кутами. Алгоритм базується на тріангуляції Делоне. Використовується алгоритм переміщення точок Штейнера. За рахунок того, що не завжди є потреба у доданні нових точок Штейнера і повторній обробці даних, досягається підвищення швидкодії алгоритму. Алгоритм триангуляції гострокутними трикутниками має велике наукове і практичне значення. Використовується при моделюванні, обчисленні та проектуванні різних поверхонь у геодезії, медицині, промисловості.

Список літератури

1. Babuska I. On the angle condition in the finite element method / I. Babuska , A. Aziz // SIAM J. Numer. Analysis. — 1976. —№ 13. —P. 214—227.
2. Baker B. S. Nonobtuse triangulation of polygons / B. S. Baker, E. Grosse, C. S. Rafferty // Disc. & Comp. Geometry. —1988. —№ 3. —P. 147—168.
3. Bern M. Polynomial-size nonobtuse triangulation of polygons / M. Bern, D. Eppstein // Int. J. Comp. Geometry and Applications. —1992. —№ 2. —P. 241—255.
4. Bern M. Linear-size nonobtuse triangulation of polygons / M. Bern, S. Mitchell, J. Ruppert // Proc. 10th ACM Symp. Comp. Geometry. —1994. —P. 221—230.
5. Eppstein D. Faster circle packing with applications to nonobtuse triangulation / D. Eppstein // Int. J. Comput. Geometry Appl. —1997. —№ 7(5). —P. 485–492.
6. Erten H. Triangulations with Locally Optimal Steiner Points / H. Erten, A. Ugnor // Proc. Eurographics Symp. Geometry Processing, Barcelona Spain, 2007.

7. Lindgren H.. Geometric dissections. Van Nostrand Princeton N. J./ H. Lindgren. 1964.
8. H. Maehara. Acute triangulations of polygons / H. Maehara // Proc. of Japan Conf. on Disc. & Comp. Geometry. —2008, Springer-Verlag, LNCS. —P. 237–243.