

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СТРУКТУР В ПРОСТРАНСТВЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

В работе рассматривается приближенный подход, предназначенный для исследования пространственно-временных структур в нестационарных задачах вычислительной механики жидкости и газа. Подход основан на решении оптимизационной задачи и применении методов визуального представления. Применение этого подхода позволяет проводить быструю приближенную оценку зависимости возникновения нестационарных структур в потоке от определяющих параметров задачи, выраженную в виде квазианалитических соотношений.

Ключевые слова: *нестационарные задачи, пространственно-временные структуры, оптимизация, обратные задачи, методы визуализации, параллельные вычисления*

Введение

Нестационарные процессы в задачах механики жидкости и газа характеризуются наличием изменяющихся пространственно-временных структур – отрывных зон, циркуляционных течений, вихревых дорожек и т.д. Появление и трансформации таких структур в потоке вызывает на практике многие нежелательные эффекты: снижение подъемной силы, вибрации летательных аппаратов, увеличение аэродинамического сопротивления. Эти структуры могут появляться и исчезать, определяя собой качественную картину и количественные характеристики течения. Тщательное изучение процессов зарождения и изменения пространственно-временных структур (ПВС) является необходимым.

Современная вычислительная техника и численные методы позволяют в настоящее время тщательно и точно моделировать практически любой нестационарный физический процесс в механике сплошных сред и получать соответствующее поле физических величин. Однако в практических приложениях недостаточно просто рассчитать поле течения и представить красивую картину трансформации пространственно-временной структуры. Гораздо больший интерес вызывает не само явление, а то, при каких обстоятельствах оно возникает, т.е. зависимость возникновения явления от определяющих параметров задачи, таких как числа Маха, Рейнольдса, Прандтля и т.д. Для того чтобы рассчитать подобную зависимость необходимо решение оптимизационной задачи, основанной на многократном решении обратных задач.

В данной работе рассматривается приближенный подход, предназначенный для быстрой и грубой оценки зависимости возникновения пространственно-временных структур от определяющих параметров задачи. Этот подход основан на решении оптимизационной задачи и применении методов визуального представления для

анализа многомерного массива дискретных данных, получаемого в результате вычислений. Согласно классификации методов научной визуализации, приведенной в [1], такой подход может быть отнесен к *методам анализа данных*.

В ряде случаев, как показано ниже на конкретном примере, применение данного подхода позволяет получать искомые зависимости в виде квазианалитических соотношений.

Интенсивное развитие параллельных вычислительных систем, согласно [2], выдвигает на первый план решение междисциплинарных и обратных задач. С этой точки зрения описываемый подход, основанный на решении обратных задач, актуален, так как может быть достаточно легко применен не только к задачам механики жидкости и газа, но и к изучению любых нестационарных процессов в сложных системах. С точки зрения решения оптимизационных задач данный подход является модификацией метода исследования пространства параметров (ИПП) [3].

Предлагаемый подход помогает в нестационарных задачах провести быструю и эффективную приближенную оценку зависимости критических точек перехода к новым структурам от определяющих параметров задачи. Реализуемый численный алгоритм сводится к решению набора однотипных небольших задач и предназначен для параллельных вычислений. К числу достоинств подхода следует отнести возможность использования его на грубых сетках.

Данная работа является развитием и продолжением работ [4,5], посвященных разработке и применению методов оптимизационного анализа нестационарных процессов.

Обратные задачи в прикладных исследованиях

Численное решение обратных задач в газовой динамике достаточно сложно в силу того, что задачи газовой динамики в общем случае многомерны по пространству. Необходимо решать 4D задачи (3D+ время) *в вариационной постановке*, что требует серьезных вычислительных и временных ресурсов, как отмечено в [6]. Отдельной проблемой является визуальное представление решений обратных задач для многомерного случая в силу нехватки концепций и инструментальных средств адекватного результату и понятного пользователю визуального представления многомерного массива данных. Тем не менее, интенсивное современное развитие вычислительных средств и методов позволяет в настоящее время решать эти задачи математического моделирования.

Используя концепцию и постановку обратных задач, мы можем решать широкий круг проблем. Как правило, реальные практические задачи заключаются в выборе наиболее оптимального варианта из множества допустимых вариантов. Это может быть выбор геометрической формы (минимальное сопротивление), выбор управления течением (максимальное смещение) и т.д. Обратные задачи классифицируются согласно [7,8], как поиски границы, коэффициента, ретроспективные обратные задачи или задачи оптимального проектирования. В общем, в практических целях обратные задачи формулируются следующим образом: найти при каких определяющих параметрах в классе задач будет возникать интересующее исследователя явление, независимо от того, как проявляется это явление количественно или качественно.

Данный подход не зависит от сути явления, а следовательно, он может быть применен в любой области.

На практике, исследуя с помощью численного или экспериментального моделирования то или иное явление, мы, как правило, знаем причину возникновения явления и управляющий этой причиной количественный параметр (управляющий параметр) x . Исследование стремится к численному или экспериментальному установлению зависимостей управляющего параметра от определяющих параметров (x_1, \dots, x_n) задачи. Построение подобных зависимостей в квазианалитическом или табличном виде является практической целью исследования.

Формализованная постановка обратной задачи выглядит в общем случае следующим образом:

Предположим, что имеется математическая модель нестационарного процесса и надежный численный метод для решения этой модели. В этом случае мы можем решать прямую задачу численного моделирования нестационарного процесса. Допустим, что в моделируемом процессе происходит некое событие (явление, эффект). Численное решение $F = F(x, x_1, \dots, x_n)$ выбранной задачи формируется в процессе математического моделирования и определяется управляющим параметром x и конечным набором определяющих параметров задачи (x_1, \dots, x_n) . Обозначим $\bar{X} = (x, x_1, \dots, x_n)$ и введем функционал события $\Phi(F(\bar{X}))$, который на решении задачи принимает, подобно логической переменной, два значения: 1 – если событие, интересующее исследователя, наступило (независимо от рода события) и 0 – если событие не наступило.

$$\Phi(F(\bar{X})) = 0 \text{ - событие не наступило} \quad (1)$$

$$\Phi(F(\bar{X})) = 1 \text{ - событие наступило.}$$

Пусть x' - значение управляющего параметра, при котором наступает изучаемое явление.

Тогда общую постановку задачи можно сформулировать следующим образом:

- найти $\min_{\Delta x} I(\Delta x)$ при фиксированных значениях определяющих параметров

(x_1^*, \dots, x_n^*) , где $I(\Delta x)$ - функционал следующего вида

$$I(\Delta x) = 1 - \Phi(F(\bar{X})), \quad \Delta x = x - x' \quad (2)$$

Таким образом, наша задача формально состоит в минимизации функционала $I(\Delta x)$ при помощи вариации управляющего параметра. А в реальности, варьируя Δx , мы должны с приемлемой точностью отыскать значение x' , то есть то значение управляющего параметра, при котором событие наступает.

Получаем одно значение $x'(x_1^*, \dots, x_n^*)$ для управляющего параметра при фиксированных определяющих параметрах. Но наша задача состоит в том, чтобы построить зависимость $x'(x_1, \dots, x_n)$ для всех возможных значений определяющих параметров. Таким образом, если мы имеем в диапазоне разбиения каждого

определяющего параметра M точек, то для того чтобы найти значения x' управляющего параметра для всех наборов (x_1^*, \dots, x_n^*) , необходимо решить M^n однотипных задач вида (2). В результате решения этого набора задач находятся все точки в исследуемом пространстве определяющих параметров, где происходит событие.

Рассматривая (x_1, \dots, x_n) как набор базисных векторов, можно представить пространство определяющих параметров $L(x_1, \dots, x_n)$, имеющее размерность n .

Тогда в общем случае задачу оптимизационного анализа можно сформулировать как нахождение в пространстве L всех подобластей L^* , где наблюдается изучаемое событие, т.е. $\Phi(L^*) = 1$.

Попутно решается задача фильтрации тех точек пространства определяющих параметров, где ожидаемое событие не наступает. Мы не можем гарантировать при выборе диапазона изменения определяющих параметров, что искомое событие наступит в каждой точке внутри выбранного диапазона. Поэтому, если для конкретной точки (x_1, \dots, x_n) пространства определяющих параметров для любых значений управляющего параметра x , событие не наступает, данная конкретная точка изымается из рассмотрения.

Оптимизационный подход и визуализация

В практических задачах вычислительной аэрогазодинамики, исследуя с помощью численного или экспериментального моделирования то или иное явление (возникновение отрыва пограничного слоя на теле, разрушение вихревой зоны и т.п.), мы, как правило, знаем причину возникновения явления и управляющий этой причиной количественный параметр (управляющий параметр) $x_{упр}^*$. Целью исследования является нахождение в квазианалитическом или табличном виде зависимостей управляющего параметра от определяющих параметров (x_1, \dots, x_n) задачи. По сути, получение подобных зависимостей составляет практический смысл аэрогазодинамики последние полвека.

В данной работе рассматривается методологический подход получения таких зависимостей с помощью численного моделирования. Суть данного подхода можно описать следующим образом.

Для изучения этого нестационарного явления (эффекта) проводится решение обратной задачи с целью нахождения точного значения управляющего параметра, при котором наступает рассматриваемое явление (например, трансформация ПВС). Обратная задача решается путем многократного решения прямой задачи с вариацией управляющего параметра $x_{упр}^*$ до наступления интересующего события. При этом заданный набор определяющих параметров (x_1, \dots, x_n) фиксирован.

Далее определяющие параметры (x_1, \dots, x_n) варьируются с выбранным шагом в пределах их областей изменения. Для каждого полученного таким образом нового набора определяющих параметров решается аналогичная обратная задача.

Результатом такого многократного расчета обратных задач является зависимость управляющего параметра от определяющих параметров задачи, представленная в общем случае n -мерным массивом $x_{упр}^*(x_1, \dots, x_n)$, представленным в дискретных точках пространства определяющих параметров.

Далее проводится аналитическое изучение массива, отбрасываются определяющие параметры, не оказывающие влияния на управляющий параметр. Тем самым понижается размерность массива.

Таким образом, в результате расчетов мы получаем искомую зависимость в виде многомерного массива. В таком виде полученные данные малоприспособны для использования в практических целях. Наиболее эффективный путь поиска возможностей квазианалитического приближения нужной зависимости – визуальное представление массива результатов.

К оставшимся после понижения размерности данным применяются современные методы визуального представления, которые в ряде случаев позволяют быстро и эффективно получить искомые квазианалитические зависимости $x_{упр}^*(x_1, \dots, x_n)$. Для получения таких зависимостей предполагается там где это возможно аппроксимировать данные массива с помощью простых геометрических элементов – линий, плоскостей, участков сфер и т.д.

Это очень просто сделать, если мы имеем дело со случаем 2-х определяющих параметров. Здесь можно построить поверхность $x_{упр}^*(x_1, x_2)$ и аппроксимировать ее с помощью простых геометрических элементов, имеющих аналитическое выражение. Для случая 3-х определяющих параметров мы можем строить изоповерхности и аналогично аппроксимировать их простыми элементами. Однако для случая более чем трех определяющих параметров мы сталкиваемся с очевидной нехваткой концепций и средств визуального представления данных. Задача визуализации многомерного массива данных, адекватно представляющей сами данные и понятной для зрителя, является на сегодняшний день нерешенной.

Данную задачу визуализации традиционно относят не столько к научной визуализации (*Scientific Visualization*), сколько к задачам визуализации информации (*Information Visualization*). Это происходит по той причине, что по большей части необходимость анализа и визуального представления многомерных массивов возникает в системах обработки информации, в частности, в бизнес-приложениях. В подобных системах предпринимались попытки выработать оригинальные методы визуализации многомерных данных. Одной из попыток было применение такого подхода как «лица Чернова». Основная идея представления информации в «лицах Чернова» состоит в кодировании значений различных переменных в характеристиках или чертах человеческого лица [9]. Для каждого наблюдения рисуется отдельное «лицо». На каждом «лице» относительные значения переменных представлены как формы и размеры отдельных черт лица. Другим примером может служить работа [10], где представлена концепция визуального представления многомерных массивов данных, ориентированная на применение в бизнес-приложениях. Пространство событий представляется в виде 3D цилиндра («туннель событий»), где время выбрано в качестве

продольной оси, а сами события представляются в виде сфер внутри цилиндра. Размеры сфер уменьшаются при удалении по оси времени от точки наблюдателя. Несмотря на пользу в сфере принятия бизнес-решений, искусственный характер подобных визуальных концепций с точки зрения восприятия пользователя очевиден.

Создание надежных и приемлемых для человеческого восприятия визуальных представлений зависимостей от более чем трех переменных является предметом для обсуждений и актуальной задачей научной визуализации.

Таким образом, нам остается лишь стараться понизить размерность рассматриваемого рассчитанного массива до трех и надеяться, что рассматриваемый класс задач позволит нам это сделать. К счастью, для многих реальных случаев это возможно, что показано на конкретном примере ниже.

Понижение размерности полученного в расчетах многомерного массива может проводиться путем анализа дисперсии данных по каждому определяющему параметру, рассматриваемому как координатное направление, и отбрасыванию малозначущих (компактификация). Другим способом является применение метода главных компонент (и его обобщений для нелинейных случаев) [11], сводящееся к выделению трех главных компонент и представлению полученных данных в новой системе координат из этих компонент.

Организация многократного решения обратной задачи, сводящаяся к многократному решению однотипных задач с разным набором определяющих параметров и варьируемым управляющим параметром органично укладывается в идеологию построения многопроцессорных параллельных расчетов по принципу многозадачного параллелизма - «одна задача – один процессор» с минимальным количеством обменов данными. Параллельное вычисление однотипных задач позволяет резко ускорить процесс расчета и сделать его гораздо более эффективным с точки зрения конкретных практических приложений.

Результаты расчетов

Данный подход был применен к исследованию процессов образования нестационарных циркуляционных зон в задаче о нестационарном взаимодействии вязкого сверхзвукового потока со струйной преградой [4,5]. Проводилось численное исследование течения на внешней боковой поверхности обтекаемого сверхзвуковым вязким потоком сопла, из которого истекает спутная сверхзвуковая вязкая недорасширенная струя большой степени нерасчетности. При расширении данная струя затекает на внешнюю боковую поверхность сопла, образуя для внешнего потока струйную преграду. Наличие струйной преграды вносит возмущение во внешний поток, что приводит к отрыву пограничного слоя на внешней поверхности сопла и возникновению во внешнем потоке перед преградой области циркуляционного течения. Типичная структура течения представлена на рисунке 1 с помощью линий тока.

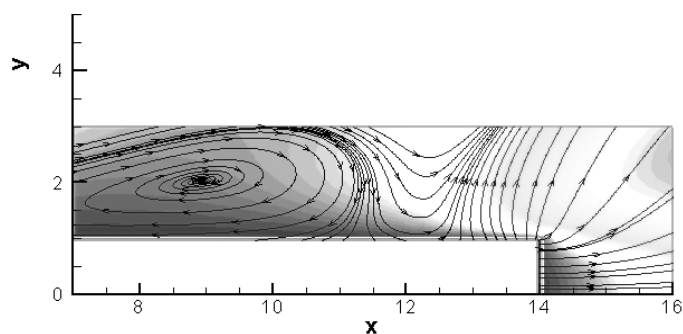


Рисунок 1. Структура потока при медленном повышении нерасчетности

Увеличение темпа повышения нерасчетности приводит к образованию новой качественной картины течения в окрестности циркуляционной зоны перед струйной преградой. Образовавшаяся новая пространственно-временная структура представлена линиями тока на рисунке 2.

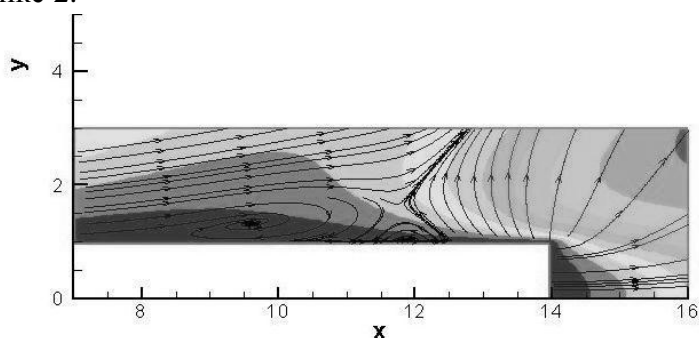


Рисунок 2. Структура потока при быстром повышении нерасчетности

В качестве математической модели использовалась полная система нестационарных двумерных уравнений Навье-Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Для численного решения задачи применялась неявная гибридная конечно-разностная WW-схема, обладающая вторым порядком аппроксимации по времени и пространству.

В качестве события рассматривалось возникновение новой пространственно-временной структуры течения (ПВС), в качестве управляющего параметра использовалась скорость повышения нерасчетности струи, а в качестве определяющих параметров были выбраны характерные числа Маха, Рейнольдса, Прандтля и Струхала ($M_\infty, Re_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty$) для данной задачи.

Для реализации вышеизложенного подхода были реализованы, как последовательный, так параллельный варианты алгоритма. Рассматривались разбиения определяющих параметров по 5 точек на каждый определяющий параметр в диапазоне его изменения и 10 точек, что вело к необходимости расчета 625 и 10000 обратных задач соответственно. Для организации расчетов использовался многопроцессорный вычислительный комплекс К-100, разработанный в Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН. При организации интерфейса для управления параллельным расчетом обратных задач использовалась технология MPI. Сначала был реализован последовательный вариант для малого разбиения. Полученный 4-мерный массив результатов использовался далее как эталон. С его помощью была получена оценочная

зависимость управляющего параметра от определяющих параметров, выраженная в квазианалитическом виде. Затем была проведена отладка интерфейса для параллельного расчета. Далее были проведены расчеты для большего разбиения определяющих параметров. На основании новых результатов было проведено уточнение квазианалитической формулы для данной задачи.

В результате проведения расчетов были построены 4-мерные массивы, численно характеризующие зависимость характерного времени наступления события $t^* = t_{cob}/t_{n=100}$ и критической скорости повышения нерасчетности V^* от четырех определяющих параметров задачи ($M_\infty, Re_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty$), где Pr_∞ - число Прандтля, Sh_∞ - число Струхала. Пределами изменения характерных чисел задачи выбраны $1.5 \leq M_\infty \leq 3$; $2.5 \leq \lg Re_\infty \leq 4$; $0.72 \leq Pr_\infty \leq 1$; $1 \leq Sh_\infty \leq 2$.

На рис. 3 и 4 представлены зависимости $V^* = V^*(M_\infty, \lg Re_\infty, Pr_\infty)$ и $t^* = t^*(M_\infty, \lg Re_\infty, Pr_\infty)$ в виде изоповерхностей. Характер изоповерхностей подтверждает ранее полученный результат, что для данного класса задач в выбранном ламинарном диапазоне числа Re_∞ , критическая скорость и характерное время не зависят от числа Рейнольдса.

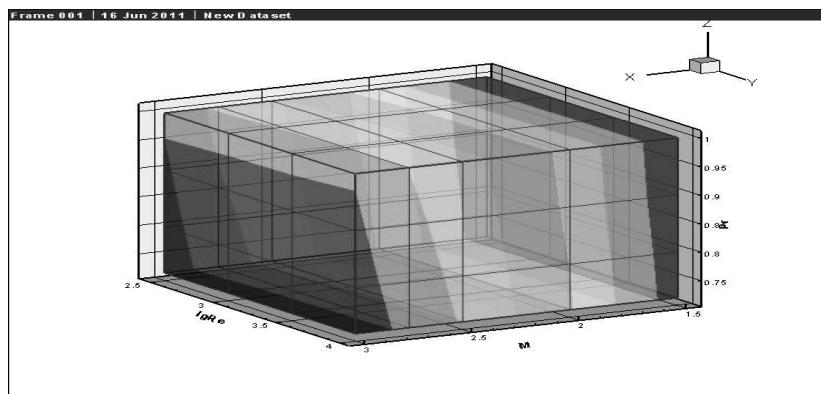


Рис. 3. Зависимость критической скорости повышения нерасчетности от чисел Маха, Рейнольдса и Прандтля

Следовательно, мы можем понизить размерность массива результатов и далее рассматривать уже трехмерные массивы $V^* = V^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$ и $t^* = t^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$. На рис. 5 и 6 представлены зависимости $V^* = V^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$ и $t^* = t^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$ в виде изоповерхностей.

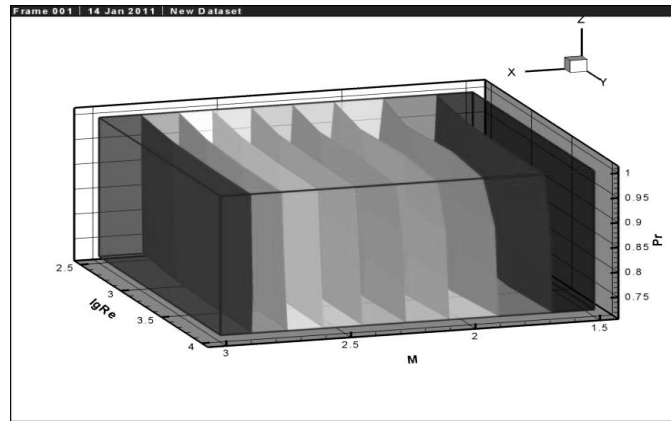


Рис. 4. Зависимость характерного времени от чисел Маха, Рейнольдса и Прандтля

Следовательно, мы можем понизить размерность массива результатов и далее рассматривать уже трехмерные массивы $V^* = V^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$ и $t^* = t^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$. На рис. 5 и 6 представлены зависимости $V^* = V^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$ и $t^* = t^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$ в виде изоповерхностей.

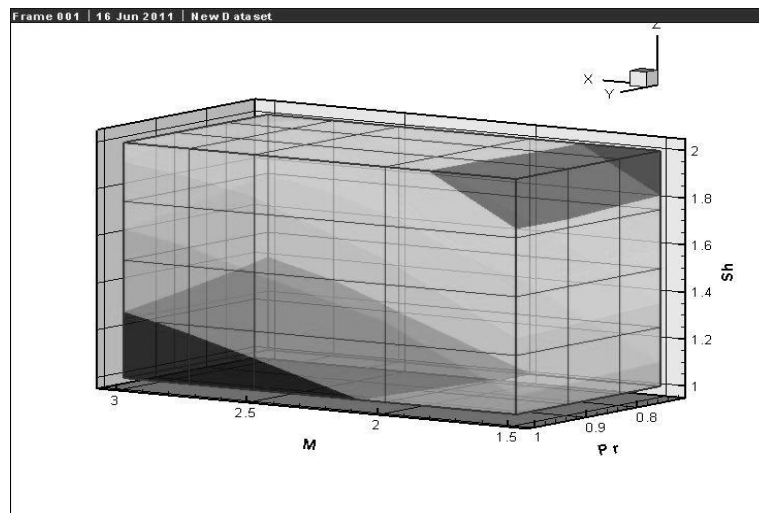


Рис. 5. Зависимость критической скорости повышения нерасчетности от чисел Маха, Прандтля и Струхала

Анализируя вид изоповерхностей, можно предположить, что для целей грубой оценки их можно представить в виде плоскостей вида $AM_\infty + BPr_\infty + CSh_\infty = const$. Построение подобных плоскостей позволяет получить квазианалитическое выражение для усредненной оценки зависимости критической скорости повышения нерасчетности и характерного времени наступления события от определяющих параметров задачи, оказывающих влияние на физический процесс образования дополнительной циркуляционной зоны в потоке:

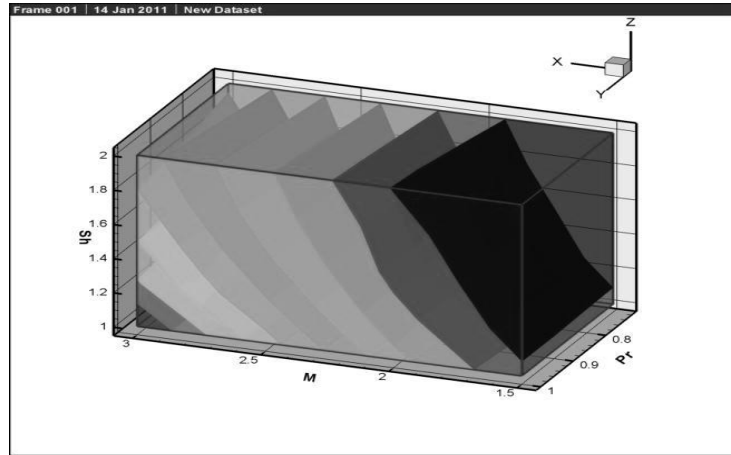


Рис. 6. Зависимость характерного времени от чисел Маха, Прандтля и Струхала

$$V^* = V^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty) = -0.1M_\infty + 0.115Pr_\infty + 0.24Sh_\infty$$

$$t^* = t^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty) = 0.224M_\infty - 0.04Pr_\infty - 0.132Sh_\infty.$$

Практическая пригодность полученного результата проверяется достаточно просто. Для этой цели нужно задать определяющие параметры и скорость повышения нерасчетности и провести расчет прямой задачи моделирования. Полученная в результате расчета пространственно-временная структура сравнивается с той, которая должна получиться согласно приближенной квазианалитической формуле.

Обсуждение

Рассматриваемый в данной работе приближенный оптимизационный подход предназначен для быстрой оценки зависимости нестационарного явления от определяющих параметров задачи. Проводится многократное решение обратных задач и получается искомая зависимость в численном виде многомерного массива. Визуализация данного массива помогает понять характер зависимости и аппроксимировать эту зависимость простыми геометрическими элементами, имеющими аналитическое выражение. К числу преимуществ такого приближенного подхода следует отнести быстроту и возможность реализации на достаточно грубых сетках. Это важно с учетом того обстоятельства, что решение трехмерных нестационарных обратных задач вычислительной аэрогазодинамики является громоздким и затруднительным делом с точки зрения вычислительных затрат. Так как многократное решение обратных задач сводится к решению большого числа однотипных похожих маленьких задач, данный подход может успешно использовать идеологию многозадачного параллелизма и быть применен для параллельных вычислений.

Из сути самого подхода следует тот факт, что весь подход применяется в определенных диапазонах изменения определяющих параметров задачи. Следовательно, результаты, полученные с его помощью, относятся не к конкретной задаче, а к классу задач.

Данный подход может применяться там, где есть необходимость анализа условий возникновения события, т.е. в широком круге задач вычислительной физики и вычислительной математики и в различных прикладных областях.

К числу недостатков рассматриваемого подхода следует отнести то, что реализуемые в данном подходе визуализация и приближение искомой зависимости простыми геометрическими элементами сталкиваются с отсутствием концепций и инструментов визуального представления для случая более чем трех определяющих параметров. Во многих случаях размерность массива результатов может быть понижена до трех. В тех случаях, когда размерность не может быть понижена, задача визуального представления многомерных массивов остается открытой для обсуждений и разработок.

В работе [12] отмечено, что в последнее время в компьютерном моделировании образовалась новая самостоятельная научная ветвь – валидация и верификация (*V&V – Validation & Verification*). Согласно [12], методы визуализации в сочетании с другими подходами должны играть ключевую роль в процедурах V&V на всех этапах вычислительного процесса – от математической модели до набора результатов. Рассматриваемый подход позволяет выверять вычислительные свойства разностных схем, определять границы моделируемого физического явления и, сочетая решение оптимизационной задачи с методами визуального представления, может служить инструментом валидации и верификации.

Предложенный в данной работе подход к решению задачи локализации пространственно-временных структур в пространстве определяющих параметров реализован в параллельном алгоритме как многозадачный расчет. Реализация такого вида распараллеливания полностью инвариантна относительно алгоритмов, как решения прямой задачи моделирования, так и обратной задачи. Следовательно, подобный подход может быть использован для решения задачи об оптимальных условиях возникновения нестационарных явлений в широком круге областей как быстрое и эффективное средство анализа и оценки.

Заключение

Рассматриваемый оптимизационный подход помогает в нестационарных задачах провести быструю и эффективную приближенную оценку зависимости критических точек перехода к новым структурам от определяющих параметров задачи. Сочетая многократные решения обратных задач и визуальное представление этих решений, данный подход позволяет для многих классов задач определить характер искомой зависимости и представить ее приближение в квазианалитическом виде. Рассматриваемый подход сводится к решению набора однотипных небольших задач и может использоваться для реализации параллельных вычислений. К числу достоинств подхода следует отнести возможность использования его на грубых сетках.

Данный подход, представляя собой синтез оптимизационной задачи и визуального представления решений, позволяет достаточно просто и эффективно оценивать условия возникновения нестационарного явления и в ряде случаев успешно получать зависимость управляющего параметра от определяющих параметров задачи в квазианалитическом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарев А.Е., Галактионов В.А., Чечеткин В.М. Анализ развития концепций и методов визуального представления данных в задачах вычислительной физики / Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. - N 4.- С. 669–683.
2. Ильин В.П. Стратегии и тактики экстремального параллелизма / Наука в Сибири.- 09.02.2012. – N 6. - <http://www.sbras.ru/HBC/article.phtml?nid=622&id=11>
3. Соболев И.М., Картышов С.В., Кульчицкая И.А., Левитан Ю.Л. О многокритериальной оптимизации математических моделей // Математическое моделирование.-1994.- N 6.- С. 85-93.
4. Бондарев А.Е. Оптимизационный анализ нестационарных пространственно-временных структур с применением методов визуализации / научный электронный журнал «Научная визуализация».- 2011.- N 2.- С.1-11.
5. Бондарев А.Е. Решение задачи оптимизационного анализа с помощью параллельных вычислений // Новые информационные технологии в автоматизированных системах: материалы пятнадцатого научно-практического семинара. - 2012.-МГИЭМ. - С. 89-94.
6. Alekseev A.K., Bondarev A.E., Molotilin Y.A. On Inverse Problems for 3D Time-Dependent Free Convection Heat Transfer // Proc. National Heat Transfer Conference, Oregon, USA, Vol.10, 1995, pp.112-122.
7. Алифанов О.М. Обратные задачи в теплопередаче. М, Машиностроение, 1988.
8. Beck J.V., Blackwell B., St.Clair C. Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems. John Wiley&Sons, USA, N.Y., 1985.
9. Savasere A., Omiecinski E., Navathe S. «An Efficient Algorithm for Mining Association Rules in Large Databases» // Proc. 21st Int'l Conf. Very Large Data Bases, Morgan Kaufmann, San Francisco, 1995, pp. 432-444.
10. Suntinger M., Obweiger H., Schiefer J., Gröller M. E. Event Tunnel: Exploring Event-Driven Business Processes // IEEE Computer Graphics and Applications, Volume 28, Number 5, 2008, pp.46-55.
11. Gorban A., Kegl B., Wunsch D., Zinovyev A. (Eds.) Principal Manifolds for Data Visualisation and Dimension Reduction / LNCSE 58, Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 2007.
12. Kirby R. M., Silva C. T. The Need for Verifiable Visualization // IEEE Computer Graphics and Applications, Volume 28, Number 5, 2008, pp.78-83.