

АНАЛІЗ МЕТОДІВ ОПИСУ 3D-ЗОБРАЖЕНЬ ПІТІНГІВ МОДЕЛЯМИ ГРАФІВ

Проведено аналіз та огляд методів опису об'ємних зображень, що базуються на використанні теорії графів. З цією метою представлено три моделі графів та здійснено порівняння їхніх характеристик. Запропоновано, на основі цього порівняння, найбільш ефективний спосіб опису об'ємної моделі зображення пітинга 3D-графом.

In this article is given overview graph-based approaches to describing models of pittings images by 3D-graphs. Considered three models – modeling graphs, skeletal graphs and reeb-graphs. Also is held the comparison of efficiency of mentioned methods which can be used for representing and recognizing of pitting images on metal surfaces in future.

1. Вступ

Багато інженерних компонентів, виготовлених із металів та сплавів, які володіють високою міцністю та пружністю, є схильними до корозії. Зокрема, вони можуть піддаватися пітинговій корозії та є чутливими до руйнуючого впливу навколишнього середовища. Для того, щоб зменшити кількість деструктивних чинників, пришвидшити процес відновлення пошкоджених елементів та продовжити термін їхньої експлуатації, проводяться дослідження механізму корозії на базі експериментів та теоретичного моделювання.

Мікротріщини виникають, зазвичай, у місцях пітингової корозії матеріалу [1]. Внаслідок взаємодії циклічних навантажень та впливу навколишнього середовища, пришвидшується процес точкової корозії, а також «виразок», що призводить до утворення тріщин які збільшуються у розмірах з часом та виникає остаточна руйнація матеріалу [2-5].

Корозія може прискорити ураження структурних компонентів, спричинених втомою металу в умовах навантаження. Дослідження та прогнозування морфології корозійних ушкоджень у вигляді каверн та тріщин є надзвичайно важливим для досягнення та збереження структурної цілісності матеріалів та конструкцій [6-9].

Для того, щоб якісно і кількісно охарактеризувати ранні стадії механізмів пошкодження у металах при корозії та циклічних навантаженнях, аналіз зображень морфології корозії може бути використаний як інструмент для прогнозування утворення тріщини в результаті зародження та росту каверн (пітингів) [10]. Саме з цією метою проводиться пошук нових способів опису та створення моделей пітингів. Деякі з них, на основі представлення 3D-зображень пітингами у вигляді структур описаних графами, буде проаналізовано у даній роботі та буде проведена оцінка цих методів за кількома вимогами (спосіб представлення форми, ефективність, надійність, здатність розрізнення деталей).

Графи є однією із найбільш загальних та потужних структур даних, яка широко використовується у різноманітних областях. Саме тому за їхньою допомогою представляють невідомі об'єкти, які повинні бути розпізнані. Таким чином, задача розпізнавання перетворюється у відповідну задачу із графом [11].

Метою, поставленою у даній роботі, є пошук найбільш точного та ефективного способу представлення зображення пітингового пошкодження матеріалу, структурою у формі графа, що надасть змогу математичного опису із можливістю подальшого передбачення росту та розвитку пошкоджень (переважно тріщин), що часто і є причиною руйнування металічних конструкцій.

Основною причиною, що ускладнює роботу із 3D-моделюванням пітингових пошкоджень, є їхні невеликі розміри, порівняно із об'єктами, для яких, зазвичай, є напрацьована схема побудови 3D-моделей. Розмір пітингової каверни коливається від десятків мікрометрів, до одного міліметра. Це, із зрозумілих причин, ускладнює процес отримання даних про форму досліджуваного об'єкта. Тому, найбільш простим та доступним шляхом побудови 3D-моделі структури такого класу, є отримання 3D-зображення із невеликого набору 2D-зображень, які можна отримати без особливих перешкод. Це питання детально розглянуто у роботі [12]

На рис. 1 представлено процес зародження пітинга та схематично зображено основні типи пітингів, які найчастіше зустрічаються на практиці.

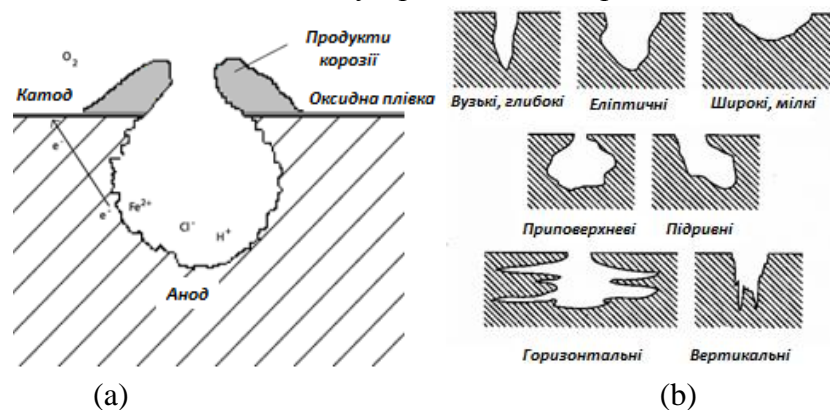


Рис.1. Процес зародження пітинга (a) та схематичне представлення різних типів пітингів (b).

2. Огляд основних методів представлення об'ємних структур із застосуванням 3D графів

Методи, що дозволяють задавати та описати об'ємні структури, можна першопочатково поділити на три категорії (рис.2): ті, що базуються на особливостях самого об'єкта; ті, у яких застосовується теорія графів; та геометричні [13].

Розглянемо більш детально лише методи, у яких застосовуються графи та проведемо порівняння їхніх характеристик.

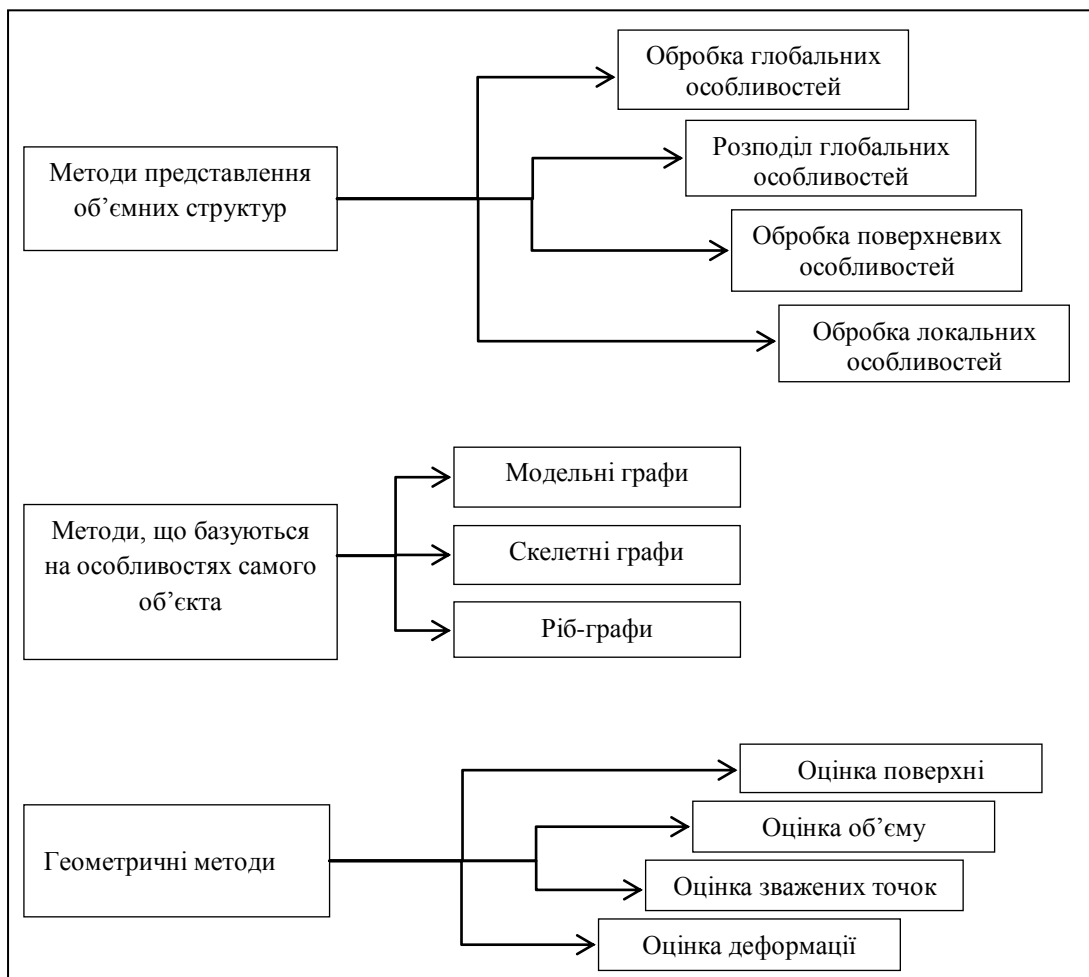


Рис.2. Таксономія методів обробки 3D-зображень.

2.1. Модельні графи

Методи із застосуванням модельних графів, застосовні до 3D-моделей твердотільних об'єктів, які можуть генеруватися більшістю САD-систем. Домінантним представленням моделювання твердотільних об'єктів є граничне представлення (Boundary Representation (B-реp)) – надалі ГП та конструктивна стереометрія (Constructive Solid Geometry (CSG)) – надалі КС.

Граничне представлення описує модель у контексті її вершин, ребер та граней – кажучи іншими словами, - цей метод описує поверхню у вигляді набору елементів простої геометричної форми. Грані ГП можуть бути представлені у вигляді поверхонь довільної форми. У КС використовується опис у вигляді набору логічних операцій, що застосовується до примітивних геометричних об'єктів таких як куби та циліндри.

Представлені модельним графом структури, подані у вигляді вузлів і кривих, що об'єднують грані. Такий підхід дозволяє оцінювати форму моделі шляхом порівняння її топології з використанням графів та інших її властивостей за допомогою векторів. Наскільки відомо, тільки Zuckerberger із співавт. [14], застосовували підхід, на основі пошуку способів конструювання природних неправильних геометричних форм із

набору простих примітивів у вигляді кубів, конусів, еліпсоїдів та ін. Наочне представлення циліндра таким способом подано на рис.3.

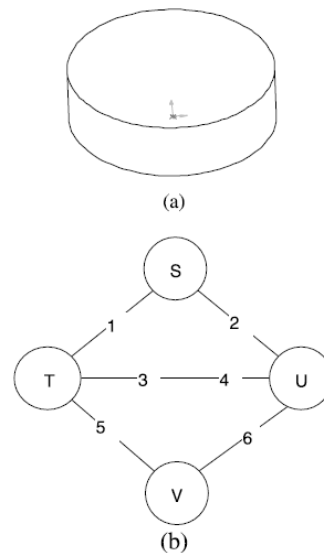


Рис.3. Циліндр (а) та відповідний йому модельний граф (b).

Але у даній роботі, не розглядатиметься такий спосіб подання об'ємної структури із причин складності цього підходу та відсутності надійного алгоритму опису складних форм простими із подальшим його практичним застосуванням.

2.2. Скелетні графи

Підхід, який використовує представлення скелетним графом, ґрунтується на виділенні скелету бінарного зображення об'єкта чи його силуету із наступним описом у вигляді графу, кожній вершині якого, відповідає ділянка скелета, що володіє певними властивостями. Дані ділянки розглядаються у якості структурних елементів опису об'єкта. Виділення структурних елементів та опис їхніх властивостей проводиться із врахуванням того, що опис об'єктів, який отримується в результаті, є інваріантним відносно масштабу та поворотів у просторі. Розпізнавання зображень зводиться до порівняння графа, який описує досліджуваний об'єкт, із графом-шаблоном, який представляє об'єкти певного класу.

Такий підхід використовується також при розпізнаванні напівтонових та кольорових зображень. Для цього спочатку виділяють межі ділянок зображення, потім на основі використання шоківих ліній (shock graphs) [15] проводиться усунення дефектів та виділення скелету. Після чого використовується методика обробки бінарних та силуетних зображень. Для бінарних, такий підхід показує хороші результати. Однак для напівтонових та кольорових зображень виникають певні труднощі, пов'язані із виділенням меж об'єктів, в результаті яких, об'єкт може бути розбитий на декілька сегментів, що ускладнює процедуру порівняння з шаблоном.

Для розпізнавання кольорових та напівтонових зображень часто використовується підхід, що базується на застосуванні локальних рис, інваріантних, відносно масштабу та поворотів, що є доволі актуальним при побудові 3D-моделей, у

тому числі і монохромних. Найбільш простим та ефективним методом для виділення таких рис, на даний момент, є використання мультимасштабного представлення, побудованого на основі згортки з функцією Гауса та її похідними [16].

Застосування функції Гауса для побудови мультимасштабного представлення дозволяє досягнути інваріантності відносно масштабу та поворотів у просторі при аналізі структури зображень. Такий опис дозволяє відновлювати як шукане зображення, так і окремі його частини, навіть такі, що відповідають окремим об'єктам.

Мультимасштабне представлення зображення на основі застосування функції Гауса, є упорядкованою множиною зображень, отриманих із початкового, шляхом згортки із нею:

$$L(x,y,\sigma_i)=G(x,y,\sigma_i)*I(x,y), \quad (1)$$

де $G(x,y,\sigma_i)$ – функція Гауса з масштабом σ_i ; $\sigma_i=k\sigma_{i-1}$, $(*)$ – згортка; $I(x,y)$ – початкове зображення. Дана множина зображень (1) утворює в об'єднаному трьохмірному просторі площину зображення – масштаб згладжування, тобто дискретну функцію $L(x,y,\sigma_i)$. Для збільшення швидкості побудови мультимасштабного представлення, користуються октавами вихідного зображення – при збільшенні масштабу згладжування у два рази, у стільки ж зменшується початкове. Відповідно множник k вибирається таким чином, щоб $k^{N_0}=2$ N_0 – кількість масштабів на одну октаву.

Однак, для виділення локальних рис зображення використовується мультимасштабне представлення, побудоване на основі згортки з ядром, яке є різницею між функцією Гауса та різноманітними масштабами згладжування, відоме як оператор DoG:

$$D(x,y,\sigma_i)=(D(x,y,\sigma_i)-G(x,y,\sigma_{i-1}))*I(x,y)= \\ L(x,y,\sigma_i)-L(x,y,\sigma_{i-1}). \quad (2)$$

Дане представлення утворює дискретну функцію $D(x,y,\sigma)$.

Як видно з формули (2), функція $D(x,y,\sigma)$ отримується із $L(x,y)$, шляхом віднімання сусідніх шарів мультимасштабного представлення. Ця обставина враховується при подальшій побудові зображення.

Локальні ознаки зображення виділяються із умови досягнення екстремуму функції $D(x,y,\sigma)$. При цьому координати (x,y) визначають центр області, які відповідають локальній ознаці, а значення σ – її характерний масштаб. Локальні ознаки, які виділяються з допомогою даного оператора DoG, відповідають плямоподібним областям однієї яскравості.

Множина виділених локальних ознак $E=\{E_j(x_j,y_j,\sigma_j)\}$ є основою для опису зображень та об'єктів, які необхідно розпізнати.

Опис зображення, побудованого на основі множини $E=\{E_j(x_j,y_j,\sigma_j)\}$, дозволяє розпізнавати об'єкти незалежно від їх масштабу та повороту. Але даний опис не в повній мірі відображає структуру зображення – не використовується ієрархія локальних ознак, яка визначає рівні деталізації зображення. Також не в повній мірі відображається сегментна структура зображення – розбиття зображення на області однорідної яскравості. Окремі локальні ознаки можуть відповідати частинам однієї ділянки. Для відображення структури зображення і об'єктів та їх складових, які, в

основному, складаються із суміжних областей однорідної яскравості, це є доволі важливим. До того ж, використання більш деталізованої інформації про структуру зображення та його окремих ділянок, дозволяє відмовитись від використання доволі громіздких дескрипторів для опису окремих локальних ознак.

Побудова опису зображення будується на основі застосування графа. Нехай $G_I^T(V^T, E^T)$ є описом зображення $I(x, y)$. Кожній вершині даного графа ставиться у відповідність структурний елемент, який відповідає деякій множині t_i елементів. При цьому кожній вершині відповідає лише один структурний елемент. Ребрами з'єднуються вершини, якщо відповідні їм структурні елементи є суміжними.

Суміжність поділяється на чотири типи: між сусідніми структурними елементами, які належать одній деталі зображення та у яких центри є сусідніми пікселями; ближні структурні елементи, які належать сусіднім деталям зображення одного типу; ближні структурні елементи, які належать сусіднім деталям зображення різних типів; структурні елементи, центри яких розміщені поряд, і які переходять один в одного при зміні масштабу згладжування.

Ребра, що відображають суміжність різних типів, маркуються по-різному. Атрибути вершин відображають властивості структурних елементів – координати у площині зображення, характеристичні масштаб та яскравість. Однак, атрибут вершини може містити більш детальну інформацію про множину t_i , яка відповідає даній вершині.

Для встановлення параметрів суміжності між структурними елементами, використовується модифіковане дистанційне перетворення. Дана модифікація дозволяє встановлювати для кожного пікселя зображення не лише відстань до найближчого об'єкта, але й індекси цього об'єкта та його найближчого структурного елемента (у тому числі пікселя) [16].

Скелетний граф, що описує 3D-об'єкт, містить топологічну інформацію про нього та слугує дескриптором його форми, що, в свою чергу, уможливорює оцифрування параметрів цієї форми та занесення даних у програму для подальшої обробки [17].

Ще однією із переваг даного підходу є його стійкість до незначних коливань меж фрагментів досліджуваних зображень об'єктів та можливість описувати маломасштабні структури, що є суттєвим у випадку із об'ємними моделями пітінгових структур [18]. Варто зазначити, що пропущені деталі зображення не враховуються.

Основні етапи створення моделі скелетного графа для даного об'єкту: отримання моделі аналізованої 3D-структури, позначення на ній вузлів майбутнього скелетного графа, об'єднання цих вузлів власне у граф, індексація вузлів та створення бази даних (запис у вигляді матриці суміжності) [19], верифікація об'єкта (порівняння із реальними об'єктами), візуалізація даних.

Скелетні графи є хорошими дескрипторами форми, із наступних причин. Їх використання надає можливість не лише глобального опису об'єкта, але і його окремих частин, яким відповідає підграф графа G_I^T (тобто можна відновлювати як усе зображення, так і його окремі ділянки). Також забезпечується візуалізація («скелет» може бути використаний при співставленні двох об'єктів, це важливо при розгляді подібних об'єктів та встановлення параметрів цієї подібності). Скелетні графи володіють високою інтуїтивністю («скелет» є інтуїтивно зрозумілим поданням форми

та легко сприймається користувачем, що дозволяє останньому контролювати процес зіставлення моделі з об'єктом).

Алгоритм, що застосовується при роботі із скелетними графами, описаний у роботі [20]. Переваги цього алгоритму полягають у тому, що обчислення проводяться доволі швидко, навіть для великих наборів 3D-об'єктів. Методологія побудови скелетного графа для об'єктів різних типів наведена у роботі [21].

Важливим також є те, що зображення можна реконструювати у вигляді графа із різним рівнем деталізації, яка відображається у ієрархічних зв'язках, між окремими структурними елементами та областями. Ця властивість надає можливість відокремлювати досліджуваний об'єкт від фону, якщо такий наявний, без додаткової попередньої обробки [16]. Схематична демонстрація представлення 3D-моделей скелетним графом зображена на рис 4.

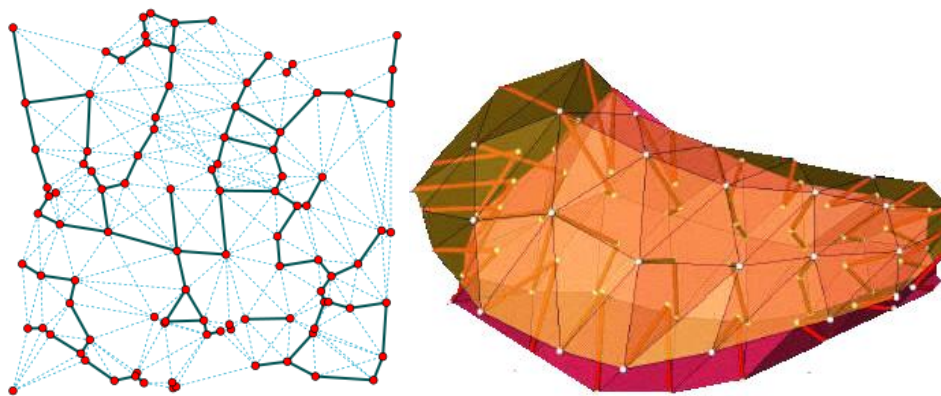


Рис.4. Приклади опису об'ємних об'єктів скелетними графами.

2.3. Ріб-графи

Ще одним способом, представлення 3D-моделі графом, що успішно застосовується на практиці є такі топологічні структури як ріб-графи. Вони володіють рядом особливостей, завдяки яким і є зручними дескрипторами для опису 3D-об'єктів. По-перше, ріб-графи завжди складаються з одномірних структур графа і не містять компонентів із вищими розмірностями, таких як вироджені поверхні. По-друге, визначаючи неперервну функцію розподілу геодезичної відстані μ , відповідно, можна побудувати ріб-графи, інваріантні до переміщень та обертання у просторі, що, у свою чергу, підвищує надійність при змінах, які можуть бути викликані певними спрощеннями чи поділом. Вони також володіють доволі високою стійкістю до шуму та деформацій. Такі властивості можуть бути пояснені за допомогою згаданої неперервної функції розподілу геодезичної відстані μ (тут – відстані між виокремленими ділянками об'єкта), якою описуються ріб-графи.

Функція μ вводиться наступним чином:

$$\mu(v) = \int_{p \in S} g(v, p) dS, \quad (3)$$

тобто $\mu(v)$ - є сумою усіх геодезичних відстаней від деякої аналізованої точки v до всіх точок поверхні S (одна із ділянок сумарної поверхні об'єкта), а функція $g(v, p)$ описує відстань від деякої точки v до точки p на S .

Методика обрахунку геодезичної відстані та алгоритм побудови самого ріб-графа представлені у роботі [22].

Таким чином, ріб-графи, що визначають геодезичну відстань, підходять для порівняння зчленованих об'єктів, і є чутливими до топологічним змін.

На рис. 5 (а) зображено лише одну ділянку γ_0 та одну пов'язану із нею компоненту s_0 , у цьому випадку ріб-граф складається із одного вузла n_0 , який відповідає s_0 .

На рис. 5 (b), ділянка γ_0 розбита на дві – γ_1 та γ_2 , із відповідними компонентами s_1 та s_2 у γ_1 , та s_3 in γ_2 . Їм відповідають вузли n_1, n_2 та n_3 .

Для рис 5(с) ріб-граф будується аналогічно.

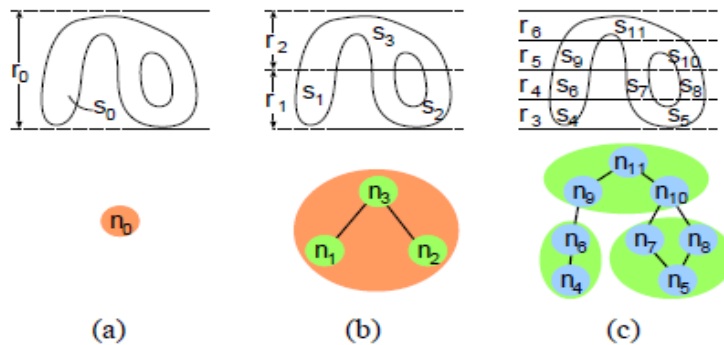


Рис.5. Схема опису та деталізації об'єкта ріб-графом.

Ріб-графи володіють наступними властивостями:

властивість 1: наявність успадкування між вузлами суміжних рівнів. Так, із попереднього рисунка видно, що вузол n_0 є батьківським для n_1, n_2 та n_3 , а вузол n_1 - батьківський для n_4 та n_6 , etc.

властивість 2: при подальшому розбитті на «тонкі» рівні, створена модель буде все точніше описувати оригінальний об'єкт.

властивість 3: ріб-граф певного рівня містить непрямым чином інформацію про всі близькі рівні. Якщо ріб-граф вже описує певний рівень, наближений ріб-граф може бути утворений об'єднанням сусідніх вузлів [22].

Використання цих властивостей дає можливість легко будувати ріб-графи та знаходити подібності між об'єктами [23]. Так, наприклад, для ідентифікації однієї подібності (зіставлення між нерозпізнаним об'єктом та об'єктом із бази даних) часові затрати становлять близько 0,05 сек, при застосуванні алгоритму топологічного узгодження, що згадується у роботі [22].

Основні етапи створення моделі ріб-графа для даного об'єкту збігаються із такими ж для скелетних графів.

Результати порівняння характеристик способів опису 3D-структур графами, наведені у таблиці 1.

Табл.1. Порівняння характеристик способів представлення 3D-структур, що базуються на застосуванні теорії графів.

Тип графа	Форма моделі	Ефективність	Швидкий алгоритм обчислення	Можливість обробки окремих частин об'єкта	Надійність
Моделльні графи	геометрично правильна форма, або апроксимація моделі довільної форми набором геометричних примітивів	Висока для простих структур (~90%), нижче середньої для складних структур (~60%, наведено лише у [14])	наявний для правильних простих геометричних форм, для неправильних задача суттєво ускладнюється	наявна	середня
Скелетні графи	об'ємна, довільної неправильної форми	середня (~75%)	наявний, к-сть ітерацій: $O(n^3)$, де n відповідає кількості вузлів графа у структурі, часова затратність – 98%	наявна, можливий різний рівень деталізації	вище середньої
Ріб-графи	об'ємна, довільної неправильної форми	середня (~70%)	наявний, к-сть ітерацій: $O(n)$, затратність алгоритму становить: $O(\log n)$, де n – кількість вузлів графа у структурі [час обробки масиву із 10000 вузлів на процесорі Pentium II 400MHz, становив близько 15 сек]	наявна, передбачається розгортання рівнів деталізації та «успадкування» між вузлами сусідніх рівнів, що надає можливість обирати потрібний рівень деталізації навіть після побудови самого графа	висока

4. Висновки

У роботі проведено порівняння основних критичних параметрів розглянутих типів графів, із аналізу якої стає зрозумілим, що на даний момент жоден із згаданих підходів для опису об'ємних структур 3D-графами, не є універсальним. Тому необхідна диференціація досліджуваної форми та підходу, що покаже кращі результати для кожного окремого випадку.

Моделльні графи (як уже згадувалось із самого початку) мало підходять для моделювання об'єктів неправильної форми, і в основному, застосовуються для моделювання геометрично правильних структур.

Наразі, із усього розглянутого вище, впливає, що для моделювання об'ємних пітінгових структур, найоптимальнішими можуть бути два методи – скелетні граfi та рiб-графfi, що рiзняються певними властивостями – такими як швидкодiя та ефективнiсть, алгоритмом обчислення i самим механiзмом представлення структури у виглядi 3D-графa.

Переваги рiб-графfiв: «лояльнiшi» до наявностi шуму, у порiвняннi з скелетними (каркасними) графами; не впливає змiна орієнтацiї у просторi. Також важливим є той факт, що для такого способу представлення 3D-структури, iснує вiдпрацьована схема реалiзацiї алгоритму CAD-програмами, що забезпечує невеликий час обчислення та точнiсть отриманих результатiв.

Недолiки: не подають повну iнформацiю про геометричнi особливостi об'єкта.

Переваги скелетних графiв: вiдносна стiйкiсть до наявностi шуму та незначних змiн границь дiлянок, на якi розбивається об'єкт, забезпечують вищу надiйнiсть отриманих результатiв обчислення, але потребують бiльших затрат часу.

Недолiки: невирiшеною залишається проблема маркування вузлiв графа.

На даний момент нас цікавить не лише представлення зображення пітінгової структури у вигляді графа, а й вирішення проблеми із прогнозуванням подальшого розвитку пошкодження матеріалу, що потребуватиме аналізу великої кількості даних про об'єкти дослідження – пітінгові пошкодження. Тому необхідно звернути увагу на часові затрати, пов'язані не лише із збором інформації про зображення, але і на самі процеси обчислення. Із розглянутих моделей, перспективнішою саме у цьому плані є модель рiб-графa, оскiльки саме для неї алгоритм є найменш затратним у часi, що є вельми суттєвою перевагою, особливо при великій кількостi об'єктiв, якi необхідно аналізувати.

Лiтература

- [1] I.M. Дмитрах, O.Л. Бiлий, A.M. Сиротюк, O.Д. Смиян, P.A. Барна, B.П. Русин, Ю.В. Обух. Оцiнка ризику руйнування та запобiгання виникненню аварійних ситуацiй у паро генеруючих системах енергоблокув ТЕС та за присутностi техногенних органiчних домишок у носiї.
- [2] G.T. Burstein, C. Liu, R.M. Souto, S.P. Vines, Origins of pitting corrosion. // Corros. Eng. Sci. Technol. 39 (2004) 25.
- [3] S.I. Rokhlin, J.Y. Kim, H. Nagy, B. Zoofan. Effect of pitting corrosion on fatigue crack initiation and fatigue life. // Eng. Fract. Mech. 2 (1999) 425–444.
- [4] S. Ishihara, S. Saka, Z.Y. Nan, T. Goshima, S. Sunada. Prediction of corrosion fatigue lives of aluminum alloy on the basis of corrosion pit growth law. // Fatigue Fract. Eng. Mater Struct. 29 (2006) 472–480.
- [5] M.R. Sriraman and R.M. Pidaparti. Life prediction of aircraft aluminum subjected to pitting corrosion under fatigue conditions. // J. Aircraft (7–8) (2009) 1253–1259.
- [6] H.S. Isaacs. Initiation of stress corrosion cracking of sensitized type 304 stainless steel in ductile thiosulfate solution. // J. Electrochem. Soc. 135 (1988) 2180–2183.
- [7] T. Suter, H. Bohni. A new microelectrochemical method to study pit initiation on stainless steels. // Electrochim. Acta 42 (1997) 3275–3280.

- [8] R. Oltra, V. Vignal. Recent advances in local probe techniques in corrosion research – analysis of the role of stress on pitting sensitivity. // *Corros. Sci.* 49 (2007) 158–165.
- [9] C.H. Paik, R.C. Alkire. Role of sulfide inclusions on localized corrosion of Ni200 in NaCl solutions. // *J. Electrochem. Soc.* 148 (2001) 276–281.
- [10] Русин Б.П. Похмурський А.Ю.//ISSN 1993-9981, Методи і засоби неруйнівного контролю.//Методи та прилади контролю якості №21, 2008.
- [11] Horst Bunke, Kim Shearer. A graph distance metric based on the maximal common subgraph. // *Pattern Recognition Letters* 19 (1998) 255–259.
- [12] IEEE. Transactions on pattern analysis and machine intelligence. Vol. 14. No 2. February 1992, p. 174-198.
- [13] Johan W.H. Tangelder and Remco C. Veltkamp. A Survey of Content Based 3D Shape Retrieval Methods. // Institute of Information and Computing Sciences. // Utrecht University.
- [14] E. Zuckerberger, A. Tal, and S. Shlafman. Polyhedral surface decomposition with applications. // *Computers and Graphics*, 26(5):733–743, 2002.
- [15] K. Siddiqi, A. Shokoufandeh, S. Dickinson, and S. Zucker. Shock graphs and shape matching. // *International Journal of Computer Vision*, 30:1–24, 1999.
- [16] А.В.Агарков. Структурное описание изображений в виде графа для решения задач распознавания. // Институт проблем искусственного интеллекта. Донецк.
- [17] H. Sundar, Rutgers University; D. Silver; Rutgers University; N. Gagvani, Sarnoff Corporation; S. Dickinson, University of Toronto. // *Skeleton Based Shape Matching and Retrieval*.
- [18] B. T.Messmer and H. Bunke. A decision tree approach to graph and subgraph isomorphism detection. // *Pattern Recognition*, 32:1979–1998, 1999.
- [19] K. Siddiqi, A. Shokoufandeh, S. Dickinson, and S. Zucker. Shock graphs and shape matching. // *International Journal of Computer Vision*, 30:1–24, 1999.
- [20] N. Gagvani and D. Silver. Parameter Controlled Volume Thinning. // *Graphical Models and Image Processing*, 61(3):149–164, May 1999.
- [21] D. Bespalov, A. Shokoufandeh, W. C. Regli, and W. Sun. Scale-space representation of 3D models and topological matching. // In *Solid Modeling '03*, pages 208–215, 2003.
- [22] Dmitriy Bespalov William C. Regli Ali Shokoufandeh, Regli. Reeb graph based shape retrieval for CAD, Proceedings of DETC'03, 2003 ASME Design Engineering Technical Conferences September 2-6, 2003, Chicago, Illinois USA, DETC2003/CIE-48194.
- [23] Topology Matching for Fully Automatic Similarity Estimation of 3D Shapes, Masaki Hilaga, Yoshihisa Shinagawa, The University of Tokyo; Taku Kohmura, The Institute of Physical and Chemical Research Toshiyasu L. Kunii, Hosei University; Kanazawa Institute of Technology.